

Curso para la enseñanza N°1

Nivel Primario

Segundo Ciclo

Matemática

La división. Problemas y cálculos.

Año 2017

COORDINADOR

INFoD



Ministerio de Educación y Deportes
Presidencia de la Nación

Presentación

Es ampliamente compartido entre los docentes el desafío que implica el abordaje de ciertos contenidos a lo largo de la educación primaria. Entre ellos, la división ocupa un lugar relevante, y sus dificultades asociadas se trasladan en algunos casos a niveles superiores de la escolaridad. Sobre la base de esta premisa, el presente Curso para la Enseñanza se propone el abordaje de aportes teóricos –tanto matemáticos como didácticos– respecto a la articulación entre el cálculo mental y el cálculo algorítmico en la resolución de cuentas de dividir, y el estudio de los distintos problemas para los cuales este cálculo es una herramienta válida. Dicho abordaje se realizará en constante diálogo con las prácticas de los propios docentes en sus escuelas.

En este sentido, –enmarcados en el Programa de Formación Situada– se promueve el intercambio de saberes docentes y saberes expertos generados en la investigación educativa y científica, articulándolos con los aportes del enfoque de desarrollo de capacidades.

El enfoque didáctico para la enseñanza de la matemática que subyace en los documentos curriculares nacionales propone una enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas y la reflexión sobre estos. Sobre la base de este enfoque particular acerca de qué significa aprender, enseñar y hacer matemática, el curso se organiza en torno a un trabajo matemático que les permita a los docentes participantes vivenciar ese quehacer y reflexionar acerca de sus particularidades y sentidos. Se parte del convencimiento de que para enseñar a hacer matemática es necesario haber pasado previamente por esa experiencia para luego identificar las condiciones que permiten instalar ese quehacer en las aulas. En paralelo, se propone brindar herramientas que ubiquen al análisis didáctico como una dimensión relevante de la tarea docente.

Objetivos

Se espera que los docentes encuentren oportunidades para:

- Identificar problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la división en el segundo ciclo de la educación primaria.
- Identificar y analizar sus concepciones sobre el dominio de la división.
- Incorporar conocimientos disciplinares y didácticos que permitan reflexionar acerca de la enseñanza de la división en el segundo ciclo.
- Realizar un análisis didáctico de diferentes propuestas de enseñanza.
- Implementar propuestas de enseñanza en sus aulas reflexionando sobre los logros y dificultades en la gestión de estas.
- Interpretar las producciones de los alumnos desde un marco didáctico-matemático que permita repensar la gestión de sus clases.

- Analizar los aspectos centrales del enfoque didáctico de la enseñanza de la matemática vigentes en los diseños curriculares.
- Propiciar el trabajo colaborativo entre los docentes participantes.
- Favorecer instancias de metacognición con relación a la propia práctica y al aprendizaje.

Metodología y estrategia utilizada

El presente curso está estructurado en torno a dos instancias indispensables para el logro de los objetivos planteados: encuentros presenciales con especialistas y colegas e instancias de práctica en el aula y la escuela.

En los **encuentros presenciales con especialistas y colegas** se desarrollará una práctica matemática de resolución de problemas con una gestión modélica, con momentos de producción de estrategias personales, de comunicación, debate y elaboración de conclusiones matemáticas. Así también, se habilitarán espacios de reflexión didáctica sobre lo vivido, analizando el “lugar” de los que producen la solución y de quien conduce la clase, el tipo de contexto, la variedad de procedimientos, representaciones y las propiedades y/o relaciones involucradas en las diversas estrategias. Además, se trabajará en el análisis de propuestas de enseñanza poniendo el foco en sus propósitos y organización, tipos de tareas y las formas de llevar adelante la puesta en común. Se tendrán en cuenta las capacidades que desarrollan los alumnos cuando el trabajo matemático en la clase incluye los momentos señalados.

En las **instancias de práctica en el aula** se promoverá la implementación de las propuestas de enseñanza abordadas en los encuentros presenciales y su registro para luego poder ser retomadas como objeto de reflexión.

Contenidos y capacidades a abordar

Capacidades:

- **Cognitivas**
 - a partir de una práctica matemática y el posterior análisis de esta, identificar problemáticas vinculadas con la enseñanza;
 - incorporar herramientas teóricas, tanto matemáticas como didácticas, que potencien el análisis de propuestas de enseñanza.
- **Intrapersonales**
 - propiciar una postura crítica que le permita reflexionar sobre la propia práctica;
 - conocer y comprender las propias necesidades de formación profesional;
 - favorecer el desarrollo y consolidación de una mirada estratégica en torno a la planificación de la propuesta de enseñanza.
- **Interpersonales**

- fomentar el trabajo en equipo entre colegas, reflexionando sobre la práctica docente.

Contenidos:

El campo de la división

Sentidos de la división. Problemas y procedimientos de resolución.

Problemas de análisis del resto.

Repertorios y estrategias de cálculo mental de división. La tabla pitagórica como herramienta para dividir.

División por potencias de 10.

Cálculo estimativo y con calculadora.

Del cálculo mental al algorítmico. Diversos algoritmos de la división.

Concepto de división entera.

Aspectos generales referidos al enfoque de enseñanza.

Condiciones para la resolución de problemas en la clase de matemática.

Análisis didáctico de las propuestas de enseñanza.

La planificación y la gestión de la clase.

Estructura de desarrollo

ENCUENTRO 1

Contenidos del encuentro

El trabajo en torno a la división en segundo ciclo. Condiciones para la resolución de problemas en la clase de matemática.

Bibliografía del encuentro

Ministerio de Educación de la Nación (2007). *Cuadernos para el aula. Matemática 4*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de http://www.me.gov.ar/curriform/nap/matematica4_final.pdf

Primer momento. PRESENTACIÓN DEL CURSO

Breve presentación del curso a cargo del capacitador.

Segundo momento. PROBLEMA PARA RESOLVER

Resuelvan en parejas el siguiente problema sin usar divisiones. Expliquen detalladamente el procedimiento que utilizaron para llegar a la respuesta.

Una fábrica de lápices los vende en cajas de 12. Si produjeron 4673 lápices, ¿cuántas cajas pueden armar?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

La idea de proponer este problema a los maestros tiene por objetivo reflexionar tanto acerca de las diferentes estrategias de resolución del problema –además de la división como del proceso de resolución de problemas – y las tareas involucradas en este.

La restricción de usar la división para resolver el problema lleva a los docentes a tener que tomar decisiones, a realizar un trabajo de búsqueda y exploración, lo que habilitará un análisis posterior sobre las condiciones

de trabajo matemático que se propone generar en las aulas. Se trata de un problema que admite estrategias de resolución muy variadas, algunas más artesanales, otras más convencionales. La puesta en común de las distintas formas de resolución y su análisis permitirá retomar aspectos vinculados con la gestión de la clase en otro momento del curso.

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Este problema se puede resolver mediante procedimientos como:

- *Si cada caja tiene 12 lápices, se puede sumar 12 hasta llegar a la cantidad total de lápices o lo más cerca posible: $12 + 12 + 12 + \dots$. Hay que tener en cuenta que cada 12 que se suma corresponde a 1 caja, por lo cual hay que registrar la cantidad de veces que se suma.*
- *Puede restarse 12 tantas veces como sea posible al total de lápices: $4673 - 12 - 12 - \dots$. Nuevamente, hay que tener en cuenta que cada 12 que se resta corresponde a 1 caja de lápices. Además, hay que restar 12 hasta que no se pueda restar más (o bien porque se llegó a 0 o a un número menor que 12).*
- *Los valores elegidos hacen que sumar o restar se torne arduo, por lo cual es esperable que surja la multiplicación como un método que permite “resumir” los dos anteriores en menor cantidad de pasos.*

El capacitador puede escribir el procedimiento completo, apoyándose en el contexto del problema: Si se arman 100 cajas, se usan $100 \times 12 = 1200$ lápices. Quedan, entonces, $4673 - 1200 = 3473$ lápices.

100 cajas más son nuevamente 1200 lápices. Quedan $3473 - 1200 = 2273$. Otras 100 cajas más y quedarían $2273 - 1200 = 1073$ lápices.

No alcanza para armar 100 cajas más. Si para 100 cajas se usan 1200 lápices, para 50 se usan la mitad, 600. Si se arman 50 cajas más quedan $1073 - 600 = 473$ lápices. Ya no es posible armar otras 50 cajas, pero si 50 cajas son 600 lápices, 25 cajas (la mitad de 50) serán 300 lápices (la mitad de 600). Si se arman 25 cajas más quedan $473 - 300 = 173$ lápices.

Si una caja tiene 12 lápices, en 10 cajas habrá 120 lápices. Si se arman 10 cajas más, quedan $173 - 120 = 53$ lápices. Para distribuir los 53 lápices restantes se pueden armar 4 cajas de 12, utilizando 48 lápices. Quedan 5 lápices que no se pueden envasar.

En total, se armaron $100 + 100 + 100 + 50 + 25 + 10 + 4 = 389$ cajas y sobraron 5 lápices.

Este desarrollo corresponde a una división resuelta de una manera diferente al algoritmo, realizando una aproximación a través de productos que permite seguir paso a paso lo que se resuelve:

4637	12	
- 1200	100	100x12=1200
3473		
- 1200	100	100x12=1200
2273		
- 1200	100	100x12=1200
1073		
- 600	50	50x12=600
473		
- 300	25	25x12=300
173		
- 120	10	10x12=120
53		
- 48	4	4x12=48
5	389	

Tercer momento. ACTIVIDAD DE LECTURA Y ANÁLISIS

- 1) Lean en subgrupos las páginas 14 a 17 de *Matemática 4º. Cuadernos para el aula* y respondan las siguientes preguntas:
 - a) ¿En qué consiste el “**modo particular de trabajo matemático**” que plantea el texto?
 - b) ¿Qué relaciones se pueden encontrar entre la respuesta a la pregunta anterior y la resolución que ustedes realizaron del problema de división?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del tercer momento

A través de esta consigna se propone reflexionar en torno al tipo de trabajo matemático que se plantea instalar en las aulas. Lo que interesa resaltar es que la resolución del problema propuesto es un ejemplo, entre otros, del tipo de quehacer matemático que se está considerando. Se considera que es muy enriquecedor para los docentes “vivir” una situación similar a la que se pretende implementar en las aulas.

Partiendo de la base de que los participantes de la capacitación dominan el concepto de la división, algunas preguntas posibles para ampliar la reflexión podrían ser:

- ¿Qué hubiese sucedido si no se restringía el uso de la división?
- ¿Cuál hubiera sido la finalidad de la puesta en común? ¿Por qué?

Cuarto momento. ACTIVIDAD DE CIERRE

Para responder en grupos:

¿Cuándo es posible afirmar que un alumno maneja el concepto de división?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del cuarto momento

La consigna de trabajo apunta a que los participantes expliciten cuáles son sus concepciones acerca de la división y su aprendizaje. Se parte de la siguiente anticipación: es extendida la idea de que alguien sabe dividir cuando sabe resolver correctamente el algoritmo correspondiente a dicha operación. Y en este sentido, lo que se entiende es que para el caso de las operaciones con números naturales, las concepciones de los docentes están marcadas por la tradición. Los algoritmos “clásicos” aún siguen traccionando la enseñanza en muchas escuelas. De esta forma, la tradición de enseñanza clásica sigue generando influencia en la actualidad en tanto, los algoritmos se siguen presentando como los objetos priorizados para la enseñanza de las operaciones.

A partir del enfoque propuesto, se pone en el centro de la discusión que el dominio de cada algoritmo no siempre posibilita tomar la correspondiente operación como herramienta para resolver un problema. Es decir, un alumno que domina el algoritmo de división, pero que no puede discernir cuándo es una herramienta válida para la resolución de problema, aún no maneja plenamente el concepto de dicha operación.

Con respecto a la gestión de este momento de la clase, una alternativa posible es pedir a cada grupo que registre su respuesta a la consigna. Luego, se podrá realizar una puesta en común y el capacitador se quedará con este registro para luego retomarlo en un próximo encuentro.

Quinto momento. ACTIVIDAD PARA EL PRÓXIMO ENCUENTRO

PRÁCTICA PARA EL AULA

Busquen en la biblioteca de la escuela o en las personales libros de diferentes épocas en los que se trabaje la división para traer al curso.

Bibliografía de consulta para el capacitador

Charlot, B. (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Conferencia pronunciada en Cannes en 1986.

Sadovsky, P. (2005). "La actividad matemática como asunto de la enseñanza". En *Enseñar Matemática hoy*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Charnay, R. (1994). "Aprender por medio de la resolución de problemas". En Parra, C. y Saiz, I. (Comps.) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

ENCUENTRO 2

Contenidos del encuentro

Sentidos de la división. Resoluciones infantiles.

Bibliografía del encuentro

Ressia de Moreno, B. (2009). *El diseño curricular en la escuela: Matemática. Documento de trabajo. Curso a Distancia Educación Primaria*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Páginas 37 a 49. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/matematicaEP.pdf>

Primer momento. PUESTA EN COMÚN DE LA PRÁCTICA EN EL AULA

Análisis colectivo de los ejemplos de libros de diferentes épocas en los que se trabaje la división.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del primer momento

Entre los variados aspectos que pueden analizarse al compartir los ejemplos aportados por los participantes, se propone hacer hincapié en el algoritmo presente en muchos libros de texto de décadas atrás, aspecto que persiste en distintas propuestas editoriales de la actualidad, dejando a los problemas como instancia de aplicación y ejercitación de estos. Además de este aspecto, se podría observar si la presentación del algoritmo brinda elementos o no para comprender cómo funciona.

Sugerimos al coordinador que seleccione algunos libros y manuales de ejemplo para complementar los aportados por los participantes.

Segundo momento - ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS.

En grupos de tres o cuatro integrantes resuelvan los siguientes problemas. Anoten los procedimientos utilizados y piensen qué tienen todos ellos en común y en qué se diferencian.

1. Se compraron 1635 azulejos para decorar un mural rectangular. En cada fila se colocan 12 azulejos. ¿Cuántas filas se podrán colocar como máximo?
2. Tengo 1635 caramelos que quiero repartir en bolsitas de 12 caramelos. ¿A cuántos niños les podré dar una bolsita?
3. ¿Cuántas veces entra el número 12 en el 1635?
4. Si una cinta mide 1635 cm de longitud y se la quiere cortar en 12 tiras iguales sin que sobre nada, ¿cuánto medirá cada una?
5. Estoy en el número 1635. Si doy saltos para atrás de 12 en 12, ¿cuántos saltos puedo dar sin pasarme del 0?
6. En una combi pueden viajar 12 pasajeros sentados. ¿Cuál es la cantidad mínima de combis que se necesitan para trasladar a 1635 deportistas durante una olimpiada?
7. Al dividir un número por 12 el cociente es 136 y el resto, 3. ¿Cuál fue el número dividido?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

Luego de un tiempo en subgrupos para la exploración de los problemas, es recomendable focalizar el análisis en algunos de ellos. No se está proponiendo centrar la discusión en la resolución de cada uno de los problemas sino en las similitudes y diferencias que se hayan podido establecer.

Todos los problemas pueden ser resueltos con una variedad de estrategias, siendo la división la estrategia óptima. Sin embargo, no en todos los casos es evidente que pueda resolverse dividiendo.

El capacitador podrá convocar a los docentes a observar que los seis primeros problemas pueden ser resueltos con la siguiente cuenta, aunque la información que se debe utilizar para resolver cada problema no es la misma en todos los casos:

$$\begin{array}{r} 1635 \\ -1632 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \hline 136 \end{array}$$

- En el problema 1, la respuesta será 136 filas, o sea el cociente de esta división. Si bien sobran 3 azulejos estos no serán considerados, ya que no son suficientes para formar una nueva fila de 12. Algo similar sucede en el problema 2 ya que los 3 caramelos restantes no llegan a armar una bolsita. Del mismo modo, en el problema 3, el 12 entra 136 veces en 1635 quedando 3 de resto y en el problema 5 podré realizar 136 saltos de 12 en 12 antes de llegar al 0.
- Si se centra la mirada en las magnitudes puestas en juego en los problemas se notará que el contexto del problema 4 demanda que “todo sea repartido”. Por lo tanto, será necesario seguir dividiendo el resto para calcular de qué manera cortamos en 12 partes los 3 metros de cinta que sobran. Estos problemas podrán ser resueltos únicamente si se recurre a los números racionales.
- Si bien el problema 6 puede ser resuelto con la misma cuenta que los anteriores, la respuesta al problema no será el cociente de la división. Esto es así ya que al distribuir a los deportistas en las combis llegaremos a completar 136 pero los 3 deportistas que conformarían el resto de la división también deben ser trasladados, motivo por el cual será necesaria una nueva combi y la respuesta al problema será 137.
- El problema 7 si bien no se resuelve “haciendo la cuenta de dividir” justamente pone en juego las relaciones entre los elementos de la división entera ya que para averiguar el número debe tenerse en cuenta que $D = 12 \times 136 + 3$.

A lo largo de la puesta en común, los docentes participantes podrán poner de relieve otras similitudes y diferencias que puedan identificar, como los contextos puestos en juego en los problemas (extramatemáticos en los problemas 1, 2, 4 y 6 e intramatemáticos en los problemas 3, 5 y 7) o los diferentes sentidos de la división. Este último aspecto resulta de sumo interés y será abordado en profundidad en la siguiente actividad.

Tercer momento - ACTIVIDAD DE LECTURA Y ANÁLISIS

- a) Lean en subgrupos los extractos seleccionados de *El diseño curricular en la escuela: Matemática. Documento de trabajo*, citado en la bibliografía, páginas 37-49.
- b) Clasifiquen los problemas de la actividad del segundo momento a partir de los diferentes tipos de problemas que desarrolla el texto.
- c) Discutan en los subgrupos cuáles de estos tipos de problemas han tenido oportunidad de proponerles a sus alumnos y cuáles aún no. Desarrollen las razones

en cada caso.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del tercer momento

El extracto del documento *El diseño curricular en la escuela: Matemática* que se anexa para su lectura en este momento, incluye actividades. Para agilizar la lectura, y dado que algunas de éstas son retomadas a lo largo del curso, sugerimos al coordinador que indique que los docentes participantes no las realicen.

Luego de la lectura y de la clasificación del listado de problemas (ítems *a* y *b*), se propone llevar adelante un momento de puesta en común para compartir los intercambios realizados en cada subgrupo. Cabe aclarar que no se espera un análisis minucioso de los sentidos de la división, sino que los docentes participantes puedan reconocer que existe un amplio espectro de situaciones que involucran esta operación, y que plantean diferentes niveles de complejidad para los niños.

Para el caso de que los participantes planteen en el ítem *c*) que determinados tipos de problema no los abordan porque son difíciles, porque los chicos no los entienden, etc., el capacitador podrá retomar la pregunta en torno a “qué es saber dividir” y en qué medida incluir o no los distintos problemas impacta en la noción de esta operación que construyan los niños.

Como resultado de la actividad, se espera llegar a conclusiones como:

- Hay muchos y variados problemas que pueden ser resueltos con una división. Es necesario proponer todos ellos a los alumnos para que, paulatinamente, construyan y amplíen el sentido de la división.
- Los problemas pueden ser más fáciles o más difíciles según: los números en juego, los tipos de magnitudes, el orden de presentación de las informaciones, las formas de presentación, el contexto en el que se presentan.
- Los alumnos son capaces de resolver gran cantidad de problemas “de división” utilizando procedimientos diversos, incluso sin usar divisiones.
- La construcción de los sentidos de la división se aborda lo largo de toda la escolaridad.

Bibliografía de consulta para el capacitador

Broitman, C., e Itzcovich, H. (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB. Documento N°2*. Buenos Aires: DGCyE, Subsecretaría de Educación. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matemat>

[ica/division.pdf](#)

Broitman, C. [et al.] (1997). *Documento de trabajo N° 4. Matemática. Actualización Curricular*. Buenos Aires: Secretaría de educación. GCBA. Recuperado de <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc4.pdf>

INFoD



Ministerio de Educación y Deportes
Presidencia de la Nación

ENCUENTRO 3

Contenido del encuentro:

Problemas de análisis del resto. Condiciones para la resolución de problemas. Planificación de una clase.

Bibliografía del encuentro

Ministerio de Educación de la Nación (2007). Cuadernos para el aula. Matemática 4. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de http://www.me.gov.ar/curriform/nap/matematica4_final.pdf

Primer momento - ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS

Les proponemos ahora ampliar un poco la mirada sobre los problemas de división y analizar el lugar que ocupa el resto. Resuelvan los siguientes problemas:

1. Tengo que cortar una varilla de 61 cm en pedazos de 7 cm. ¿Cuántos cm de varilla me van a sobrar?
2. Al repartir 248 cartas en partes iguales entre 15 personas, a cada una le tocan 16. ¿Cuál es la mínima cantidad de cartas que hay que agregar para que no sobre ninguna al repartirlas?
3. Hay que trasladar 94 personas en autos. Si en cada auto pueden viajar 5 personas, ¿cuántos autos se necesitan como mínimo?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del primer momento

Es fundamental proponer a nuestros alumnos situaciones en las que puedan resolver y reflexionar respecto de los distintos problemas en los que la división es una operación pertinente. Entre ellos se ubican los problemas en los que es necesario analizar el resto para llegar a la respuesta. Resultan más complejos ya

que implican decidir qué hacer con “lo que sobra” en función del contexto, y la solución no coincide con el cociente de la división (aunque según la situación requiere considerarlo). Por ello, consideramos que resulta interesante la inclusión de esta actividad para analizar junto con los docentes participantes este aspecto de los problemas de división.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

Luego de la resolución de los problemas, puede realizarse una puesta en común tomando como eje del análisis “qué se hace con el resto” en cada problema.

- En el primer problema, la respuesta la encontramos en el resto, es “lo que sobra”.
- En el segundo caso, es necesario analizar cuánto debe agregarse al resto para que el cociente aumente una unidad.
- En el tercer problema, como no es posible dejar personas sin viajar, es necesario agregar uno al cociente, y uno de los autos no viajará completo. Se trata de una restricción que está ligada al contexto en el que se planteó el problema y, como en el caso anterior, se debe considerar tanto el resto como el cociente.

A partir de este análisis se espera que los docentes participantes puedan reflexionar sobre la necesidad de ampliar la variedad de problemas que se les plantea a los alumnos para construir el concepto de la división, y que no pueden reducirse a aquellos en los que la respuesta es el cociente.

Con esta finalidad, el capacitador podrá proponer volver a la pregunta del Encuentro 1 (“¿Cuándo es posible afirmar que un alumno maneja el concepto de división?”), para identificar qué aporta a su respuesta lo analizado respecto a los problemas en los que es necesario analizar el resto.

Segundo momento. ACTIVIDAD DE LECTURA Y ANÁLISIS

- a) Lean en subgrupos las páginas 22 a 29 (desde el apartado “Construir condiciones para resolver problemas”) del documento *Matemática 4º. Serie Cuadernos para el Aula*. Realicen un punteo de los aspectos centrales para compartirlos con el resto de los participantes.
- b) Puesta en común.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

A través de esta actividad se espera que los docentes participantes puedan volver sobre una serie de conceptos que aborda el texto:

- organización de la clase;
- tipo de interacciones;
- presentación del problema;
- diversidad de producciones;
- intervenciones del docente durante el momento de la resolución;
- momento de intercambio;
- registro de conclusiones (cuaderno o carpeta y pizarrón).

Estos conceptos serán insumo para realizar la actividad del siguiente momento en la que tendrán que planificar la puesta en aula de problemas.

Tercer momento. ACTIVIDADES PARA EL PRÓXIMO ENCUENTRO

PRÁCTICA PARA EL AULA

1. Antes de la implementación:

Agrupados con colegas que estén al frente del mismo grado, seleccionen uno de los sentidos de la división que consideren pertinente trabajar con el grupo de alumnos que tienen a cargo. Piensen o busquen dos o tres problemas que aborden el sentido seleccionado para trabajar en el aula durante las próximas semanas. Una vez que hayan definido los problemas, realicen las siguientes consignas de trabajo:

- a. Anticipen los procedimientos que podrían poner en juego sus alumnos al resolver los problemas seleccionados.
- b. Planifiquen las clases considerando los siguientes aspectos:
 - organización de la clase;
 - presentación del problema;
 - intervenciones docentes durante el momento de la resolución;
 - planificación del momento de intercambio;
 - conclusiones que quedarán escritas al finalizar la clase.

2. Después de la implementación:

Les solicitamos a cada uno que una vez que implementen en el aula los problemas seleccionados, elaboren un breve registro de su clase. Pueden incluir fotos o fotocopiar los registros de los procedimientos que produjeron sus alumnos y así poder analizarlos en el próximo encuentro. Incluyan tanto los procedimientos que les permitieron a los alumnos llegar a la respuesta así como los procedimientos erróneos.

ENCUENTRO 4

Contenidos del encuentro

Repertorios y estrategias de cálculo mental.

Bibliografía del encuentro

Novembre, A. (coord.), Sancha, I. (2009). *Cálculo mental y algorítmico. Mejorar los aprendizajes*. Buenos Aires: DGCE. Recuperado de http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/calculo_mental_algoritmico.pdf

Bibliografía complementaria

Ministerio de Educación de la Nación (2007). *Cuadernos para el aula. Matemática 4*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de http://www.me.gov.ar/curriform/nap/matematica4_final.pdf

Ministerio de Educación de la Nación (2007). *Cuadernos para el aula. Matemática 5*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de http://www.me.gov.ar/curriform/nap/mate5_final.pdf

Primer momento. PUESTA EN COMÚN DE LA PRÁCTICA EN EL AULA

Agrupados con colegas que estén al frente del mismo año:¹

- a. Compartan, analicen y comparen los registros de los procedimientos que produjo cada grupo de alumnos al resolver los problemas.
- b. Comparen la puesta en aula con la planificación que habían realizado y reflexionen en torno a las siguientes preguntas: ¿Qué obstáculos previstos inicialmente se presentaron en la clase? ¿Cuáles no? ¿Qué tendrían en cuenta en el futuro al elaborar sus planes de trabajo?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del primer momento

En este momento se espera generar un espacio de intercambio entre docentes que comparten grado, con la finalidad de analizar colectivamente los distintos procedimientos utilizados por los alumnos a propósito de los problemas implementados en las aulas. El capacitador los invitará a reflexionar acerca de las razones por las cuales sus alumnos utilizaron unos procedimientos y no otros, vinculados seguramente al trabajo realizado previamente con estos contenidos.

También se pretende que puedan compartir sus reflexiones respecto de la distancia que siempre existe entre las clases planificadas y las que finalmente se desarrollan, así también analizar las intervenciones realizadas y/o que tendrían que estar presentes para otras clases que formen parte de esa secuencia.

Segundo momento. ACTIVIDAD DE LECTURA Y ANÁLISIS

Actividad 1.

Para introducirnos en el tema en el tema de esta clase, les proponemos identificar las diferencias entre cálculo mental y algorítmico a partir de las siguientes definiciones, dando un ejemplo de cada una.

1 Se recomienda que –de ser posible– los grupos coincidan con los que en la clase anterior seleccionaron los problemas y pensaron su implementación.

Cálculo algorítmico: serie de reglas aplicables en un orden determinado, siempre del mismo modo, independientemente de cuáles sean los números en juego, que garantizan alcanzar un resultado en un número finito de pasos. Resulta eficaz y económico en algunas situaciones, ya que permite aplicar mecánicamente un procedimiento sin tener necesidad de reflexionar a cada paso.

Cálculo mental: conjunto de procedimientos que se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido; apela a una diversidad de técnicas que se adaptan a los números en juego y a los conocimientos (o preferencias) de cada uno. Es un cálculo reflexionado, que es ventajoso para estimar resultados, realizar cálculos aproximados o exactos, y como mecanismo de control de los algoritmos.

Actividad 2.

En grupos de trabajo lean las páginas 22 a 25 del documento “Cálculo mental y algorítmico” citado en la bibliografía de la clase. Respondan: ¿Qué papel cumple el docente frente a este tipo de propuesta?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

Es frecuente que los maestros asocien el cálculo mental con aquel que se realiza “en la cabeza” y con rapidez. Sin embargo, lo que define a este recurso no es que no se escriba, sino el contraste que presenta respecto al cálculo algorítmico. Para reconocer sus diferencias, se propone la primera actividad, que los participantes podrán realizar individualmente y luego compartir entre todos.

En segundo término, se propone profundizar estas ideas iniciales identificando los distintos procedimientos que se ponen en juego en el cálculo mental de multiplicaciones y divisiones. Si bien en el texto hay algunas referencias respecto al rol del docente en la enseñanza del cálculo mental, será necesario focalizar en que son sus funciones: seleccionar los problemas, favorecer la adquisición de un repertorio memorizado, organizar reflexiones grupales habilitando la circulación de la palabra, identificar los nuevos conocimientos que circulan en la clase y vincularlos con los anteriores, sistematizar las nuevas relaciones.

Tercer momento. ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS

Resuelvan estos problemas utilizando cálculo mental. Analicen a qué apunta cada uno y qué tipo de estrategias se ponen en juego para su resolución.

1) Resuelvan los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}80:2= & 800:2= & 8000:2= \\120:4= & 900:3= & 1500:5= \\700:2= & 1000:4= & 2400:8=\end{aligned}$$

2) Resuelvan los cálculos. Indiquen de qué manera es posible usar algunos de los cálculos para resolver otros.

$$\begin{aligned}70:7= & 700:7= & 770:7= & 7070:7= \\1200:4= & 1200:2= & 1200:3= & 1200:6=\end{aligned}$$

3) Sabiendo que $9 \times 7 = 63$, calculen mentalmente:

$$6300:9= \quad 630:7= \quad 6300:7=$$

4) Calculen mentalmente:

$$\begin{aligned}80000:10= & 80000:20= \\80000:100= & 80000:400= \\80000:1000= & 80000:8000=\end{aligned}$$

5) Usando el cálculo resuelto, encuentren mentalmente el resultado de los restantes. Luego comprueben con la calculadora los resultados hallados:

$$2250 \times 7 = 15750$$

$$15750:7= \quad 15750:2250= \quad 15750:70= \quad 15750:225=$$

6) Para resolver el cálculo $1.650 : 15$, dos chicos pensaron así:

Matías	Ana
$1.650 : 15 = 1.500 : 15 + 150 : 15$	$1.650 : 15 = 1.650 : 10 + 1.650 : 5$

¿Son correctas las dos formas de resolver? ¿Por qué?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del tercer momento

Las actividades seleccionadas son ejemplos de problemas que se abordan a lo largo de segundo ciclo para la enseñanza del cálculo mental de divisiones. Si bien su resolución no será desafiante para los maestros, el análisis didáctico de las situaciones permitirá identificar la intencionalidad de una variedad de problemas que conforman el campo del cálculo mental. También será una oportunidad para elaborar algunos criterios a tener en cuenta al seleccionarlos para su tratamiento en el aula.

El problema 1 presenta un conjunto de divisiones entre números redondos y habilita a discutir acerca de la relación entre los cálculos de cada fila y cómo unos pueden ayudar a resolver otros. Se espera que los maestros puedan explicitar las estrategias que han utilizado para hallar los resultados. Por ejemplo, que para calcular $8000 : 2$ se puede usar el resultado de $80 : 2$, o que para $120 : 4$ se puede pensar en la multiplicación $4 \times 3 = 12$. La relación entre multiplicación y división se retoma en el problema 3, a partir de un cálculo dado.

Los números puestos en juego en el problema 2 invitan nuevamente a la exploración de las relaciones entre los cálculos. En el primer caso, los maestros podrán basar sus explicaciones en la utilización de composiciones y descomposiciones aditivas de los dividendos y en la estrategia de apoyarse en un cálculo conocido para resolver otro. En el segundo caso, será interesante advertir las relaciones de doble y mitad de los divisores de cada par de cálculos.

El problema 4 permite poner en juego la división por la unidad seguida de ceros y su extensión a otros múltiplos de 10. Una vez explicitadas las estrategias que utilizaron los docentes para resolver los cálculos, puede ser provechoso discutir el porqué de la regularidad, es decir, “por qué se quitan ceros”.

El problema 5 pone el acento nuevamente en las relaciones entre la multiplicación y la división, pero esta vez con números más grandes y menos redondos. Se trata de interpretar la información que provee un cálculo multiplicativo para anticipar el resultado de distintas divisiones.

Por último, en el problema 6, permite explorar las maneras en las que se pueden descomponer los números al realizar divisiones. Se puede invitar a los maestros a explorar la situación haciendo los cálculos, tal como harían los niños en sus primeros contactos, para luego hacer explícitas las propiedades involucradas y analizar su alcance.

Luego de brindar un tiempo para la resolución de los problemas de forma individual, es recomendable proponer un intercambio en subgrupos para que los docentes puedan comunicar las estrategias utilizadas y analizar a qué apunta cada situación. En la puesta en común, el capacitador retomará dichas discusiones haciendo foco en las características de los problemas y en cómo van aumentando en complejidad. También resulta relevante identificar algunas marcas del tipo de gestión de clase necesarias para la enseñanza del cálculo mental.

Como resultado de la actividad, se espera llegar a conclusiones como:

- existen diferentes maneras de calcular y se puede elegir la forma más adecuada a cada situación y en función de los números que están en juego;
- para hacer cálculos mentales es preciso disponer de algunos en la memoria;
- las estrategias de cálculo mental se apoyan en propiedades de las operaciones y del sistema de numeración;
- enseñar cálculo mental supone la selección de una secuencia de varios problemas que permitan la exploración y el estudio sistemático. También requiere organizar instancias de trabajo colectivo con distintos propósitos: para comparar estrategias, someter a análisis los errores, analizar y explicitar relaciones nuevas, sistematizar lo aprendido.

Como propuesta adicional, se puede sugerir a los docentes que rastreen en la Serie Cuadernos para el Aula de 4º y 5º, juegos y otras actividades que pueden abordarse con los alumnos en torno al cálculo mental de divisiones.

Bibliografía para el capacitador

Broitman, C. (2014). *Estrategias de cálculo mental con números naturales: segundo ciclo*. Buenos Aires: Santillana. Recuperado de <http://s61151b070ae82056.jimcontent.com/download/version/1426279777/module/11228980629/name/estrategias%20de%20calculo.pdf>

Broitman, C., e Itzcovich, H. (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB. Documento N°2*. Buenos Aires: DGCyE, Subsecretaría de Educación. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/division.pdf>

ENCUENTRO 5

Contenidos del encuentro

Cálculo estimativo y con calculadora

Bibliografía del encuentro

Novembre, A. (coord.), Sancha, I. (2009). *Cálculo mental y algorítmico. Mejorar los aprendizajes*. Buenos Aires: DGCyE. Recuperado de http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/calculo_mental_algoritmico.pdf

Bibliografía complementaria

Broitman C., e Itzcovich, H. (2001). *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB. Documento N°6*. Buenos Aires: DGCyE. Recuperado de <http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/eltrabajoconlcalculadoraenlostresciclosdelaegb.pdf>

Primer momento - ACTIVIDAD DE LECTURA Y ANÁLISIS

Distribuidos en pequeños grupos, resuelvan las siguientes consignas de trabajo:

- a) Conversen entre ustedes en torno a las siguientes preguntas: ¿En qué situaciones utilizan la calculadora? ¿En cuáles utilizan cálculo estimativo? ¿Por qué eligen estos recursos de cálculo en lugar de otros?
- b) A partir de la lectura de los apartados “Resultados aproximados” (pág. 17 a 20), y “¿Para qué usar la calculadora?” (pág 25) del documento “Cálculo mental y algorítmico”, citado en la bibliografía, completen un cuadro como el siguiente:

	PARA QUÉ USAR...	CUÁNDO USAR....	CÓMO USAR... (Situaciones ejemplificadoras)
RESULTADOS APROXIMADOS			
CALCULADORA			

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

Los alumnos deben aprender a elegir entre los diferentes recursos de resolución de cálculos cuál o cuáles son los más apropiados, teniendo en cuenta los números involucrados y la situación a resolver. Por ello, además del cálculo mental y el algoritmo, se propone trabajar sobre el *cálculo estimativo* frente a situaciones que requieren sólo una respuesta aproximada, y el dominio de la *calculadora* como instrumento adecuado para resolver ciertos problemas o cálculos.

El punto a) de la actividad tiene como objetivo que los docentes participantes reflexionen en torno al uso que le dan a los distintos recursos de cálculo. Partiendo de sus experiencias personales, la propuesta es que se ponga de relieve que la conveniencia de utilizar un determinado recurso de cálculo es el resultado de una decisión que se toma frente a cada situación particular. Por ejemplo, es muy probable que para averiguar el triple de 3.000 se deba recurrir al cálculo mental mientras que para resolver 543×768 se deba utilizar la calculadora, o en su ausencia, al algoritmo de la multiplicación. O que para saber si alcanza el dinero que se tiene para comprar una serie de productos se deba utilizar el cálculo estimativo. Esta posibilidad de decidir qué recurso de cálculo es más conveniente para cada situación particular, también debe ser propiciada en la escuela.

El punto b) propone comparar las diferentes propuestas de enseñanza con calculadora y cálculo estimativo, que presenta el texto, para luego detenerse en el análisis y reflexión de lo trabajado.

Bajo determinadas condiciones, el uso de la calculadora favorece un trabajo reflexivo –vinculado a quehaceres propios de la matemática– que permita explorar propiedades, encontrar regularidades, validar procedimientos y resultados de manera más autónoma (sin tener que recurrir al docente). Además, permite

enfrentar a los alumnos a problemas cuyos cálculos aún no pueden resolver.

En relación con la enseñanza de la estimación nos parece importante encuadrar el trabajo considerando que si bien tiene utilidad en la vida cotidiana, las razones por las cuales introducir este tema residen en “(...) el hecho de “tener a mano” ciertas estrategias que permitan anticipar el resultado aproximado de una operación es un instrumento potente para controlar una cuenta con la que se obtiene un resultado exacto. Por otro lado, la riqueza de relaciones que es posible establecer al realizar una aproximación, las relaciones puestas en juego, las decisiones que implica y la evaluación de la razonabilidad de los resultados que se obtienen son en sí mismas razones suficientes para desplegar este tipo de tarea en el aula.” (Novembre, 2009).

Segundo momento. ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS			
Luego de resolver estas actividades en torno al cálculo estimativo, júntense en pequeños grupos y analicen:			
a) ¿Qué procedimientos de resolución utilizaron?			
b) ¿Por qué es importante trabajar este tipo de actividades con los alumnos?			
Actividad de anticipación de cocientes			
Sin hacer la cuenta, seleccionen cuál creen que es el cociente correcto:			
2.480 : 8	310	210	31
6.990 : 5	2.399	1.398	3.498
2.750 : 11	25	2.500	250

Actividad de anticipación de la cantidad de cifras del cociente:

Previo a la resolución del algoritmo, cualquiera sea la forma que se use, puede estimarse cuántas cifras tendrá el cociente. Resuelvan las siguientes situaciones y expliquen cómo lo pensaron:

- El cociente de $1245 : 12$ tendrá cifras.
- El cociente de $234 : 7$ tendrá cifras.
- El cociente de $346 : 27$ tendrá cifras.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

Luego del momento de trabajo en pequeños grupos se propone realizar una puesta en común. En relación con la primera actividad, en la que deben identificar el cociente de cada cálculo, los docentes podrían apelar tanto a la división como a la multiplicación. Por ejemplo, para $2.480 : 8$ podrían apoyarse en la división: “si se divide 2.480 por 10, se obtiene 248. Como lo estoy dividiendo por 8 el cociente debe ser mayor. Por lo que no pueden ser ni 210 ni 31”. También podría resolverse pensando que $2400 : 8$ es 300 ya que $3 \times 8 = 24$, entonces el cociente será mayor y cercano a 300. Para $6.990 : 5$ podrían apoyarse en la multiplicación: “como 2.000×5 es 10.000 y 3.000×5 es 15.000, el resultado tienen que ser 1.398”. También podría pensarse que si $1.000 \times 5 = 5.000$ y $2.000 \times 5 = 10.000$, entonces el cociente estará encuadrado entre 1.000 y 2.000.

Además de poner de relieve que existen diversas estrategias para resolver este tipo de actividades, el capacitador podrá centrar el intercambio en relación con la importancia de trabajar este tipo de actividades con los alumnos. En este sentido, podrá retomarse lo que se afirma en el texto leído en el primer momento, en torno a que este tipo de actividades permitirá “que sus alumnos puedan obtener siempre antes de realizar un cálculo algorítmico o con calculadora, resultados estimativos previos y controlar posteriormente los resultados exactos”.

La segunda actividad, específicamente, tiene por objetivo estimar la cantidad de cifras que tendrá el cociente. Muchas veces los alumnos cometen errores al realizar el algoritmo convencional de la división, como, por ejemplo, olvidarse de bajar un número o de poner el cero en el cociente cuando el resto es menor al divisor, o dividir por un número menor y obtener un resto mayor al divisor y luego volver a dividirlo. En ocasiones se obtienen cocientes con más cifras de las correctas y los alumnos carecen de conocimientos que permitan tener el control sobre los resultados por lo que no se dan cuenta. La

anticipación de la cantidad de cifras de un cociente permite a los alumnos tener un control sobre el resultado e identificar si deben volver a realizar la cuenta.

Una manera de estimar la cantidad de cifras del cociente de la división $1.245 : 12$ es la siguiente:

Como $12 \times 10 = 120$, que es menor al dividendo, entonces el cociente debe ser mayor que 10.

Como $12 \times 100 = 1.200$, y es menor al dividendo, entonces el cociente debe ser mayor que 100.

Como $12 \times 1.000 = 12.000$, que es mayor al dividendo, entonces el cociente debe ser menor que 1000. Así, el cociente será mayor a 100 (ya que al multiplicarlo por 12 da como resultado 1.200) y menor a 1.000. Dado que 1.000 es el menor número de cuatro cifras, entonces el cociente no puede tener cuatro cifras. Es decir, que tendrá **tres cifras**. En este caso, dado que multiplicar a 12 por 100 da como resultado un número cercano al 1.245, podemos anticipar también que el cociente será cercano a 100.

Tercer momento - ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS

Resuelvan individualmente los siguientes problemas y luego analicen en pequeños grupos:
¿con qué finalidad se puede utilizar la calculadora en el trabajo con divisiones?

- a) Se tienen 473 figuritas para armar paquetes de a 5 figuritas cada uno. Queremos saber cuántos paquetes de figuritas se pueden armar y cuántas figuritas quedan sin empaquetar. ¿Cómo se puede resolver el problema usando la calculadora?
- b) Encontrá el resultado de hacer $3.422 : 8$ con una calculadora a la que no le funciona la tecla del 8.
- c) Sin hacer las cuentas, decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no.
Luego utilizá la calculadora para verificar la respuesta.

- Al ingresar en la calculadora la cuenta $1.576 : 5$, el cociente que se obtiene es un número mayor que 300.

- Si se multiplica 207 por 4 y al resultado se lo multiplica por 2 se obtiene un número mayor a 1.500.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del tercer momento

Desde nuestra perspectiva, el trabajo con calculadoras no sólo no impide ni reemplaza el trabajo con los cálculos convencionales o con los cálculos mentales, sino que los enriquece. Las consignas propuestas son ejemplos de algunos de los posibles tipos de problemas que pueden proponerse con la calculadora. Analicemos el primer caso. Si se hace la división con la calculadora se obtiene 94,6 como resultado de la división. Este resultado no permite contestar directamente la pregunta. Se podría eventualmente contestar la primera pregunta: se pueden armar 94 paquetes de figuritas. Pero, ¿qué sentido tendría decir que quedan 0,6 figuritas sin empaquetar? Tenemos que encontrar el resto. Una manera de hacerlo es multiplicar la parte decimal (0,6) por el divisor (5). De esta forma, se obtiene 3 como respuesta. También puede utilizarse la relación euclidea para hallar el resto, ya que se dispone del cociente, el divisor y el dividendo.

Este problema puede ser planteado a los alumnos con la finalidad de ampliar los significados de la división y la relación entre cociente, divisor, resto y dividendo² ($D = d \times c + r$, con $d < D$, con $c < D$), pero aun cuando dicho conocimiento matemático ya esté disponible, este problema permite investigar uno de los “límites” de la calculadora: no siempre ofrece la respuesta de manera directa.

El problema b) apunta al estudio de la división a partir del análisis y la explicitación de sus propiedades. En este caso, se puede analizar que es posible descomponer el divisor 8 en 4×2 para realizar $3.422 : 4$ y luego al resultado dividirlo por 2, utilizando la propiedad asociativa de la división. Para el caso en que utilicen una calculadora que incluya el uso de paréntesis, el problema puede resolverse con el siguiente cálculo: $3.422 : (4 \times 2)$.

En el problema c) la calculadora es utilizada para verificar resultados a los cuales se llegó a través de otro recurso, en este caso del cálculo mental.

En resumen, la calculadora es un instrumento de uso social que los alumnos deben aprender a usar con criterio. Pero al mismo tiempo constituye un recurso que permite plantear problemas muy interesantes desde el punto de vista matemático.

Bibliografía de consulta para el coordinador

Broitman, C., e Itzcovich, H. (2001). *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres*

2

Un análisis más detallado de esta relación será abordado en el Encuentro 7.

ciclos de la EGB. Documento N°2. Buenos Aires: DGCyE. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/division.pdf>

Broitman C., e Itzcovich, H. (2001). *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB. Documento N°6.* Buenos Aires: DGCyE. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/eltrabajoconlcalculadoraenlostresciclosdeleagb.pdf>

Bibliografía de referencia

Novembre, A. (coord.), Ponce, H. (2009). *Cálculo mental de sumas y restas. Propuestas para trabajar en el aula.* Buenos Aires: DGCyE, Dirección Provincial de Educación Primaria. Recuperado de

<http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/docsumasyrestas.pdf>

ENCUENTRO 6

Contenidos del encuentro

Del cálculo mental al algorítmico. Diversos algoritmos de la división.

Bibliografía del encuentro

Ressia de Moreno, B. (2009). *El diseño curricular en la escuela: Matemática. Documento de trabajo. Curso a Distancia Educación Primaria*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/matematicaEP.pdf>

Primer momento. ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN Y ANÁLISIS

a) Les proponemos que resuelvan individualmente la siguiente división utilizando el algoritmo convencional o tradicional:

$$448 : 5$$

b) Escriban en parejas un listado de los pasos realizados en la resolución.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del primer momento

Si bien todos los docentes saben de la dificultad de los alumnos por dominar el algoritmo convencional de la división, no son muchas las oportunidades que han tenido para reflexionar sobre la complejidad que encierra dicho procedimiento. El objetivo de esta actividad consiste justamente en hacer explícita esta característica, no para deslegitimar su enseñanza sino para pensar su abordaje. Consideramos que este

algoritmo debe ser objeto de enseñanza, pero en un marco que garantice su comprensión y el control de sus pasos. A su vez, no debe ser el único procedimiento aceptado en el aula sino que puede convivir con otros, de modo que sean los alumnos quienes puedan decidir en cada ocasión cuál es el más adecuado. Este tipo de decisiones también son parte del quehacer matemático que se espera que los alumnos incorporen.

Luego de que las parejas hayan completado la actividad, se propone realizar una puesta en común sobre los listados de pasos para la resolución del algoritmo realizados por las parejas.

A continuación, el capacitador puede introducir el análisis sobre la complejidad de este algoritmo.

Se debe reconocer que es el primer algoritmo convencional que los alumnos encuentran que se resuelve comenzando desde la izquierda: la suma, la resta y la multiplicación se inician desde la derecha. Por lo tanto, aquí hay una ruptura con lo que han aprendido con anterioridad en torno a las reglas de resolución de las cuentas.

Si se analizan las acciones desarrolladas en la resolución con el algoritmo convencional se encontrará:

- una descomposición aditiva implícita del dividendo: $400 + 40 + 8$;
- la consideración de una parte de esa descomposición: $400 + 40 = 440$, (En este caso, dado que el 4 del 400 es menor que 5, se comienza operando con el 440, el cual es tratado como 44);
- la búsqueda del factor que, multiplicado por el divisor, se aproxime lo más posible sin superar a la parte del dividendo que se está dividiendo: $8 \times 5 = 40$, $9 \times 5 = 45$ (me paso del 44 por lo cual elijo el 8);
- el cálculo de ese producto, el cálculo de la diferencia entre ese producto y la parte de la descomposición del dividendo considerada: $80 \times 5 = 400$ (si bien al desarrollar el algoritmo se lo nombra como 8×5 en realidad se está multiplicando 80×5) y $440 - 400 = 40$ (o bien $44 - 40$);
- la composición de esa diferencia con otra parte del dividendo (correspondiente a la cifra de jerarquía inmediata inferior): $40 + 8 = 48$ (los 40 restantes del cálculo anterior se suman a los 8 que todavía no fueron divididos);
- y se comienza nuevamente esta serie de pasos hasta finalizar el algoritmo. Al trabajar con números naturales, se termina cuando el número que aún no se dividió, es menor que el divisor.

Segundo momento. ACTIVIDAD DE OBSERVACIÓN Y ANÁLISIS

En los siguientes enlaces encontrarán la resolución del cálculo $875 : 3$ realizada por tres alumnos (también se incluye la versión impresa). Obsérvenlos y establezcan sus similitudes y diferencias teniendo en cuenta:

- los pasos realizados en la resolución de los distintos procedimientos;
- los conocimientos que consideran necesario que los alumnos tengan disponibles para resolver estos procedimientos.

Video 1: <https://www.youtube.com/watch?v=JXMIq5tO7m4>

Video 2: <https://www.youtube.com/watch?v=y9BzQR0XVF4>

Video 3: <https://www.youtube.com/watch?v=TBd06IrOND8>

$\begin{array}{r} 875 \\ - \underline{6} \\ 27 \\ - \underline{27} \\ 05 \\ - \underline{3} \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 875 \\ - \underline{300} \\ 575 \\ - \underline{300} \\ 275 \\ - \underline{30} \\ 245 \\ - \underline{30} \\ 215 \\ - \underline{30} \\ 185 \\ - \underline{30} \\ 155 \\ - \underline{30} \\ 125 \\ - \underline{30} \\ 95 \\ - \underline{30} \\ 65 \\ - \underline{30} \\ 35 \\ - \underline{30} \\ 5 \\ - \underline{3} \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 875 \\ - \underline{600} \\ 275 \\ - \underline{270} \\ 005 \\ - \underline{3} \\ 2 \end{array}$
$\begin{array}{r} 875 \\ - \underline{3} \\ 291 \end{array}$	$\begin{array}{r} 875 \\ - \underline{3} \\ 291 \end{array}$	$\begin{array}{r} 875 \\ - \underline{3} \\ 291 \end{array}$

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

El objetivo de esta actividad es que los docentes comparen los distintos procedimientos poniendo la mirada en los conocimientos que deben tener disponibles los alumnos para desarrollarlos, las virtudes y las limitaciones de cada uno.

En relación con la gestión de esta, el capacitador deberá definir si considera más adecuado que la actividad se resuelva individual o grupalmente, teniendo en cuenta con qué recursos cuenta (computadoras, celulares, tablets). De todas formas, se incluyen los registros gráficos de los algoritmos que aparecen en cada video de modo tal que las dificultades técnicas posibles de acceso a Internet no sean un obstáculo para su realización y para poder trabajar en su análisis posteriormente.

Luego de un lapso de tiempo de trabajo individual o grupal, se propone realizar una puesta en común de lo producido por los docentes participantes. En dicho momento, podrán considerarse los siguientes ejes de análisis:

- en los tres procedimientos de cálculo los alumnos resuelven correctamente la división y llegan al mismo resultado realizando distintos pasos en su resolución;
- En los videos 1 y 2, los alumnos desarrollan el algoritmo desplegado, mientras que la alumna del video 3 realiza el algoritmo tradicional o convencional, incluyendo, en este caso, la resta en la cuenta;
- En el video 1 la alumna multiplica exclusivamente por 100, 10 y 1. De esta manera, para obtener los productos tan sólo debe saber multiplicar 3 por potencias de 10. Es decir que no precisa conocer la tabla del 3. Pero, como contrapartida, es una estrategia con muchos cocientes parciales y muy extensa.
- En el video 2, en cambio, el alumno dispone de más herramientas de cálculo y opera con múltiplos de 10 y 100, lo cual hace la cuenta más corta. Sin embargo, ambos logran realizar el cálculo, tomando decisiones a partir de los conocimientos que disponen.
- En los procedimientos de los videos 1 y 2, hay un mayor registro escrito de los cálculos provisorios o intermedios que en el del video 3. Además, en los dos primeros casos, el número del dividendo es considerado globalmente mientras que en el tercer caso se lo descompone para operar.

- El algoritmo convencional “oculta” las descomposiciones de los números, las multiplicaciones y, en algunos casos, las restas. Los algoritmos desplegados muestran aquellas operaciones.

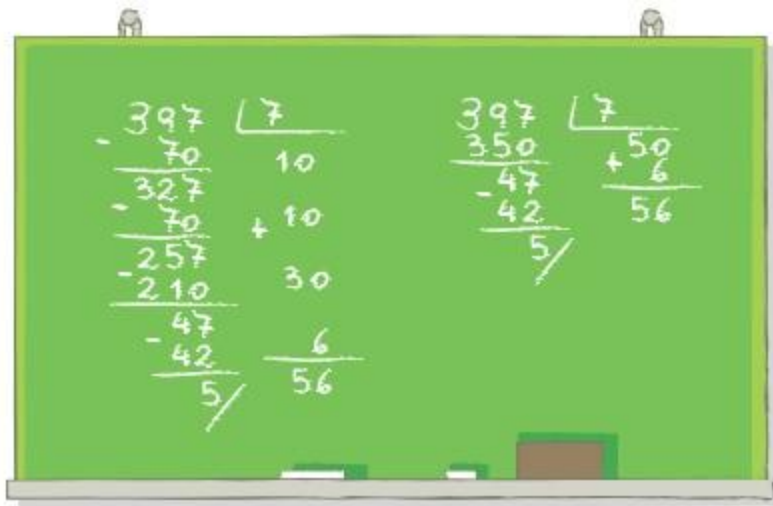
Ya se ha realizado un análisis de las características del algoritmo convencional o tradicional en la actividad anterior.

Respecto de los algoritmos desplegados, se puede agregar que, en muchos casos, permite que los niños puedan controlar las acciones realizadas durante el proceso de la división y que su desarrollo se sostiene no sólo en la comprensión del proceso de reparto y restas reiteradas, sino también en el cálculo mental (tablas, multiplicaciones por la unidad seguida de ceros) sin cuyo dominio la estrategia no se puede sostener. Con dicho objetivo, deberá trabajarse previamente con los niños con aproximaciones sucesivas de restas y fortalecer suficientemente el repertorio de la multiplicación incluyendo productos por 10, 100, 20, 200, etc.,

Respecto a la enseñanza de los algoritmos de la división, en los Cuadernos para el aula, Matemática 4, se plantea:

Solo después de un intenso trabajo con cuentas, que muy probablemente sean largas, es decir que en el cociente aparezcan reiteradamente cienes y dieces, nuestras intervenciones podrán apuntar al acortamiento de dicho algoritmo.

Para esto, podremos escribir dos cuentas en el pizarrón y fomentar que los niños establezcan relaciones entre números del cociente.



Si, avanzados en este procedimiento, propusiéramos resolver cuentas en las que se incluyan divisores de dos cifras a partir del trabajo desplegado, esto no implicaría un obstáculo, puesto que los niños ya pueden extender este procedimiento en dichas cuentas.

El desarrollo de este procedimiento está sostenido, no sólo en la comprensión del proceso de reparto y restas reiteradas, sino también en el cálculo mental (tablas, multiplicaciones por la unidad seguida de ceros) sin cuyo dominio la estrategia no se puede sostener.

Asimismo, también es importante avanzar en el uso reflexivo de la calculadora para operar con números grandes, fortaleciendo la evaluación de la razonabilidad del resultado con el cálculo aproximado (Ministerio de Educación de la Nación, 2007).

Muchas veces, al presentar directamente el algoritmo convencional sin dar espacio y tiempo para ir aproximándose a él en forma progresiva, se corre el riesgo de quitarle todo sentido en tanto puede transformarse sólo en un conjunto de pasos que se deben seguir. Esta es una de las principales razones por las que los alumnos presentan tantos problemas para resolver la cuenta de dividir.

Con esto no se está queriendo decir que no se deban enseñar los algoritmos, sino que sería más pertinente y rico que surjan como consecuencia de todo un recorrido de trabajo y no, como un inicio.

Tercer momento. ACTIVIDAD DE ANÁLISIS

A continuación, se presenta una adaptación de la secuencia citada en la bibliografía del encuentro, que propone abordar los conocimientos de base necesarios para el aprendizaje de los algoritmos de la división.

Guiados por el capacitador, lean la siguiente secuencia y analicen junto con el resto de los colegas las actividades que en ella se proponen, identificando cuál es el objetivo y el/los contenido/s que aborda y destacando qué aspectos de los pasos para la realización de los algoritmos se ponen en juego.

Secuencia en torno al algoritmo de división

Adaptación de Ressa de Moreno, B. (2009). *El diseño curricular en la escuela: Matemática*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Recuperado de <http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/matematicaEP.pdf>

Teniendo en cuenta la complejidad del algoritmo de la división es importante identificar la necesidad de enseñar primero a sus alumnos los conocimientos de base que se ponen en juego al utilizar la cuenta de dividir convencional. Uno de los aspectos a tener en cuenta, es que dispongan de la posibilidad de anticipar el valor del cociente sin necesidad de recitar toda la tabla. Esto será útil tanto para la cuenta como para cualquier tipo de resolución por cálculo mental. A continuación, se incluyen tipos posibles de situaciones que permiten trabajar estas competencias.

1. ¿Cuántas veces entra un número en otro?

[1] *¿Cuántas veces hay que sumar... para alcanzar el número....? (o cuántos saltos de a... hay que dar para llegar a....) Anotá lo que pensaste y después verificá con la calculadora.*

- a) ¿Cuántas veces hay que sumar 6 para acercarse lo más posible a 80 sin pasarlo?
- b) ¿Cuántas veces hay que sumar 7 para acercarse lo más posible a 85 sin pasarlo?
- c) ¿Cuántas veces hay que sumar 6 para acercarse lo más posible a 100 sin pasarlo?

d) ¿Cuántas veces hay que sumar 5 para acercarse lo más posible a 95 sin pasarlo?

2. Problemas de distribuciones

a) Completá la tabla:

Cantidad de botellas de gaseosa	Cantidad de packs de 4 que se pueden armar	Sobrantes
38		
52		
69		
78		
100		
124		

b) Se reparten \$ 120 entre 6 personas en partes iguales. ¿Cuánto recibe cada uno?

¿Y si se reparten \$180 entre 6?

¿Y si se reparten \$400 entre 4?

¿Y si se reparten \$200 entre 10?

¿Y si se reparten \$555 entre 5?

c) Si se reparten en partes iguales....

\$	Entre ... personas	Cada uno recibe	Sobra
44	4		
84	8		
70	20		

d) Se van a distribuir una cantidad de lápices en partes iguales entre 5 grados, ¿para cuáles de estas cantidades se podrán repartir todos los lápices sin que sobren?

195

450

200

559

3. División entera

a) Para cada una de estas respuestas, decidí si es correcta:

	Cociente	Resto	¿Correcto o incorrecto?	Para los incorrectos, respuesta correcta
a) ¿Cuántas veces entra 5 en 26?	5	1		
b) ¿Cuántas veces entra 5 en 49?	9	4		
c) ¿Cuántas veces entra 7 en 48?	6	0		
d) ¿Cuántas veces entra 10 en 67?	6	7		

b) Encontrá el cociente y el resto en cada uno de estos casos:

	Cociente	Resto
a) ¿Cuántas veces entra 3 en 22?		
b) ¿Cuántas veces entra 8 en 46?		
c) ¿Cuántas veces entra 4 en 39?		

c) Sabiendo que $48 : 6 = 8$, calculá mentalmente el resultado de las siguientes divisiones y después verificá con la calculadora.

$48 : 12 =$ $48 : 3 =$	$24 : 6 =$ $24 : 12 =$
---------------------------	---------------------------

d) Sabiendo que $12 \times 8 = 96$, calculá mentalmente el resultado de las siguientes divisiones y después verificá con la calculadora.

$96 : 8 =$ $96 : 12 =$ $96 : 6 =$	$960 : 12 =$ $96 : 2 =$ $96 : 4 =$
---	--

e) Un número multiplicado por da ¿qué número es? Escribilo y después verificá con la calculadora.

Un número multiplicado por...	da....	¿Qué número es?
10	160	

100	320	
100	1700	

f)

Un número multiplicado por...	da....	¿Qué número es?
3	60	
20	60	
50	250	

4. Búsqueda del dividendo

a)

Un número dividido por....	da.....	¿Qué número es?
10	4	
10	76	
100	12	
1000	19	

b)

Un número dividido por....	da.....	¿Qué número es?

2	2	
2	20	
4	20	
6	36	

c) Ya sabemos que, a veces, para hacer divisiones es útil descomponer el dividendo de una manera que resulte “cómoda”, es decir, en números que “den justo” al dividirlos por el divisor dado.

Por ejemplo, para $183 : 3$

Para algunos podría ser conveniente pensar al 183 como $150 + 33$, dividir cada una de esas partes por 3 y luego sumarlas: $150:3= 50$; $33:3 = 11$; $50+11=61$. También sabemos que no hay una única manera de descomponer el número que resulte conveniente:

Es posible pensar el 183 como $90 + 93$ y hacer $90: 3 + 93: 3 = 30 + 31 = 61$

O

$$183 = 120 + 63$$

$$120 : 3 + 63 : 3 = 40 + 21 = 61$$

etcétera.

A continuación, te proponemos una serie de divisiones. Para cada una de ellas, elegí una manera de descomponer el dividendo que facilite los cálculos:

Dividendo	Divisor	Descomposición del dividendo	Divisiones parciales	Cociente	Resto
57	5				

78	7				
84	6				

5. Cálculo estimativo.

a) Para las siguientes divisiones, marca entre qué números estará su cociente:

	Entre 0 y 10	Entre 10 y 100
82 : 2		
132 : 5		
364 : 4		

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del tercer momento

Las actividades que se incluyen en la secuencia que se propone analizar, apuntan centralmente a abordar los conocimientos de base que se ponen en juego al utilizar la cuenta de dividir convencional aunque también aportan herramientas para resolver cuentas utilizando algoritmos desplegados. Por ejemplo, la posibilidad de anticipar el valor del cociente sin necesidad de recitar toda la tabla. En este sentido, la secuencia es un ejemplo posible del tipo de trabajo que se puede llevar a cabo con los alumnos para realizar el pasaje del cálculo mental al algorítmico.

Para el desarrollo de este momento, se sugiere que el capacitador realice una presentación de la secuencia propuesta a través de una lectura compartida de las actividades que componen esta. De esta forma, podrá ir deteniéndose en cada actividad para analizar en cada caso cuál es el objetivo y el/los contenido/s que aborda y destacando qué aspectos de los pasos para la realización de los algoritmos se ponen en juego.

A continuación, se comparten algunos ejes sobre las actividades que pueden servir de insumo para el momento de reflexión análisis colectivo a cargo del capacitador:

- En la actividad del **punto 1** se propone realizar anticipaciones de la cantidad de veces que hay que sumar un número para llegar a otro. Las reflexiones que se generen deben apuntar a que

utilicen los resultados conocidos como soporte para resolver los desconocidos. Por ejemplo, en el primer punto (a), podrían pensar el 80 como $60 + 20$ y apoyarse en un resultado conocido, $6 \times 10 = 60$, para luego pensar cuántas veces más tengo que sumar 6 para los 20 restantes. La consigna de esta actividad también permite que quien no dispone de un amplio repertorio multiplicativo, pueda resolverla aproximando con sumas sucesivas o multiplicaciones parciales.

- Las actividades del **punto 2** incluyen diversas situaciones de reparto a través del cálculo mental, en las que se propone identificar también cuánto sobra e incorpora la necesidad de identificar el valor del resto. Aquí también se espera que para resolver se apoyen en el repertorio de cálculos conocidos.

- En las actividades del **punto 3**, se propone la utilización del repertorio multiplicativo para resolver problemas de división entera.³ En la **actividad c)**, se propone partir de que $48 : 6 = 8$ para resolver mentalmente otros cálculos y luego verificar con la calculadora. Por ejemplo, para el caso de $48 : 12$, puede pensarse que al dividir 48 por el doble de 6, el resultado será la mitad del resultado del cálculo que conocemos, o sea 4. Y en el siguiente, que al dividir $48 : 3$, como estamos dividiendo al 48 por la mitad de 6, el resultado será el doble del resultado del cálculo que se aporta como información, en este caso 16. La actividad del **punto d)**, es similar aunque, al aportar como información para realizar las divisiones un cálculo multiplicativo, le otorga centralidad a la relación entre la multiplicación y la división.

Entre las **actividades e) y f)** existe una diferencia importante. Mientras que en la primera de ellas sólo se pone en juego la multiplicación y la división por potencias de 10, en la segunda se agregan multiplicaciones por factores que no están formados por unos y ceros. En ambos casos una estrategia muy probable es que los alumnos busquen por qué número hay que multiplicar al que aparece en la columna de la izquierda para obtener el del centro. En el primer cuadro, las cifras que componen el número buscado ya están escritas en el número de la columna del centro (excepto los ceros, por supuesto). Por ejemplo $10 \times 16 = 160$. En cambio, en el segundo cuadro se agrega la necesidad de buscar “en la tabla del 3” (para el caso de la primera fila, por ejemplo) un número que multiplicado por ese dé por resultado 6 y luego se analiza qué cantidad de ceros corresponde escribir en cada caso.

- Las dos primeras actividades del **punto 4 (a y b)** relacionan la multiplicación con la división. Para encontrar el dividendo de las divisiones propuestas, muy probablemente los alumnos multipliquen el cociente obtenido por el divisor que se ofrece. Nuevamente aquí mientras que en el primero de estos dos cuadros aparecen multiplicaciones por potencias de 10, en el segundo, aparecen multiplicaciones por cifras distintas de uno. La **actividad c)** se propone una serie de divisiones para que en cada caso se elija una manera de descomponer el dividendo de acuerdo al divisor dado de modo tal de que faciliten los cálculos utilizando cálculos conocidos.

3 Un análisis más profundo de esta relación será desarrollado en la clase 7.

- La actividad del **punto 5** es un ejemplo de actividad posible para abordar el cálculo estimativo de cocientes, recurso importante para que los alumnos tengan un control de la pertinencia de los resultados.⁴

Cuarto momento. ACTIVIDAD DE PRÁCTICA EN EL AULA

Todas las actividades que se proponen en la secuencia analizada en el momento anterior son sólo ejemplos posibles para la enseñanza y precisan ser analizadas por el docente teniendo en cuenta las características de su grupo de alumnos antes de su implementación.

Agrupados con colegas que tengan a cargo el mismo grado/año seleccionen por lo menos 3 actividades que consideren pertinentes para trabajar con el grupo que tienen a cargo.

Antes del próximo encuentro, implementen en el aula las actividades que seleccionaron. Al finalizar esas clases, tómense unos minutos para responder las siguientes preguntas:

- 1) ¿Cuál fue el momento de la clase que considera el más destacado, el más logrado? Puede incluirse un breve diálogo entre alumnos o entre los alumnos y usted.
- 2) ¿Cuál fue el momento complicado de la clase? Se trata de seleccionar aquel momento en el desarrollo de los temas que lo puso en una situación de enseñanza difícil de resolver.
- 3) Repensando sus intervenciones a lo largo de la clase, ¿cuál le parece que le permitió afinar el rumbo de la clase, mejorar en algún sentido lo que venía sucediendo, destrabar alguna situación?

Bibliografía de referencia

Ministerio de Educación de la Nación (2007). *Cuadernos para el aula. Matemática 4*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de http://www.me.gov.ar/curriform/nap/matematica4_final.pdf

4 Es una variante más que se agrega a las ya trabajadas en la clase anterior.

ENCUENTRO 7

Contenidos del encuentro:

División entera. Análisis de la relación $D = C \times d + r$, con .

Bibliografía del encuentro:

Broitman, C. (coord.), Escobar, M., Salgado, M. (2007). *División en 5° y 6° grado de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre divisor, dividendo, cociente y resto*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Recuperado de <http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/divisionen5y6.pdf>

Primer momento. PUESTA EN COMÚN DE LA PRÁCTICA EN EL AULA

En la clase anterior han realizado una selección de actividades de cálculo de divisiones para implementar en sus grados. Reúnanse en los mismos grupos y compartan las notas que tomaron como registro de sus clases.

Luego elaboren una reflexión sobre la potencialidad didáctica y los desafíos de este tipo de abordaje para la enseñanza del algoritmo de división.

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del primer momento

La actividad inicial apunta a compartir la experiencia desarrollada en el aula a propósito de los problemas seleccionados en el encuentro anterior. El capacitador invitará a los docentes a recuperar sus notas en torno a las intervenciones realizadas, en tanto marcas de la gestión de la clase.

Con la segunda propuesta se espera recuperar las ideas de los participantes acerca de la enseñanza de la cuenta de dividir y ponerlas en discusión de ser necesario. Posiblemente algunos docentes hagan referencia a la falta de tiempo para realizar las actividades propuestas, o que los alumnos ya conocen el algoritmo convencional de grados anteriores, lo que será una nueva oportunidad para reflexionar colectivamente sobre los distintos aspectos que abarca la enseñanza del cálculo, y que no se agotan en la adquisición del algoritmo.

Segundo momento. PROBLEMAS PARA RESOLVER

Los siguientes problemas podrían formar parte de una secuencia de trabajo pensada para alumnos de los grados superiores. Resuélvanlos en parejas. Pueden usar calculadora.

1. Escriban una cuenta de dividir en la que el divisor sea 11, el cociente 12 y el resto 9
¿Cuántas divisiones pueden encontrar con estas características?
2. ¿Qué números permiten completar esta cuenta?

$$\begin{array}{r} \dots\dots \\ \dots / \end{array} \begin{array}{r} | 11 \\ \hline 12 \end{array}$$

3. Propongan una cuenta de dividir en la cual el divisor sea 11 y el resto sea 9. ¿Cuántas cuentas hay?

4. Escriban una cuenta de dividir que tenga cociente 25 y resto 12.
 - a) ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?
 - b) ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?⁵
5. Un número puede expresarse como $a = 12 \cdot n + 9$, donde n representa un número natural.
 - a) ¿Cuál es el resto de dividir al número a por 12?
 - b) ¿Cuánto se le podrá sumar al número a para obtener un resultado que:
 - i) tenga resto 9 al dividirlo por 12?
 - ii) tenga resto 10 al dividirlo por 12?
 - iii) sea divisible por 6?

¿Hay una única respuesta para cada pregunta?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del segundo momento

En este encuentro se propone profundizar el análisis de la división entera, ya no como operación que permite resolver ciertos tipos de problemas, sino como objeto matemático en sí. Para ello se proponen situaciones en las que se centrará la atención sobre la relación $D = d \cdot x + r$ ($0 < r < d$, donde D , d , c y r son números enteros no negativos y d no es 0).⁶ Esta relación, llamada relación euclideana, no sólo muestra cómo obtener alguno de los elementos de la división a partir de los otros tres, sino que constituye la definición de división entera. A partir de la escritura de la relación puede reconstruirse el cálculo que representa. Por ejemplo, a partir de saber que $34 = 15 \cdot x + 4$, es posible decir que al dividir a 34 (dividendo) por 15 (divisor), el cociente es 2 y el resto 4.

Todos los problemas propuestos involucran la división entera, pero en cada uno existen cuestiones diferentes que se ponen en relieve. El primer problema demanda averiguar el dividendo dados los otros tres datos. Tiene una única solución, que puede hallarse al multiplicar cociente por divisor, y sumar el valor del resto. Se pone aquí en juego en forma directa la relación: $D = d \cdot x + r$.

El problema 2 es posible que los docentes busquen determinar el dividendo y el resto probando con distintos valores y ajustando los valores. Será interesante analizar que la relación $D = d \cdot x + r$, lleva a concluir que hay 11 cuentas posibles, condicionadas por los once posibles restos desde 0 hasta 11.

5 Este problema fue extraído de Broitman, C. (coord.), Escobar, M. y Salgado, M. (2007). *División en 5º y 6º año de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto* (p.21). Buenos Aires: DCCyE. Recuperado de <http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/division5y6.pdf>

6 Donde D representa al dividendo; c al cociente; d al divisor y r al resto.

En el problema 3 hay que determinar el dividendo y cociente. Puede ocurrir que los docentes elijan arbitrariamente un valor para el cociente, y hallen el dividendo multiplicándolo por el divisor y sumándole el resto. Otros optarán por un valor al azar para el dividendo, realizarán la cuenta e intentarán corregir ese dividendo, a partir de sucesivos ensayos, hasta que se ajuste a la estructura que pide el problema. Analizar la cantidad de respuestas posibles ayudará a advertir que se trata de un problema que tiene infinitas soluciones, en la que el cociente puede ser cualquier número natural o cero, mientras que el divisor puede obtenerse multiplicando cada cociente por 11 y sumándole 9. Si llamamos n al cociente, el dividendo se puede calcular haciendo $D = 11n + 9$, donde n es un número natural o cero.

El problema 4 requiere averiguar el dividendo y el divisor. Nuevamente se trata de un problema con infinitas soluciones, pero habrá que tener en cuenta que el menor divisor posible es 13, ya que el resto es 12. Es esperable que los docentes inicien la resolución con divisores mayores que el resto, o que puedan anticipar que existen infinitas cuentas que cumplen la condición dada. Este problema será retomado en el tercer momento del encuentro.

Con respecto al quinto de los problemas, propone considerar varias cuestiones. Si $a = 12.n + 9$, entonces siempre tendrá resto 9 al ser dividido por 12, ya que el producto entre 12 y n será divisible por 12. Pero si se desea, en cambio, que tenga resto 10 al ser divisible por 9 será necesario “que sobre uno más”, así que se le podría sumar cualquier número que sea múltiplo de 12 más 1 (1; 13; 25; etc). Finalmente, para que “ a ” sea divisible por 6 como se pide en el punto iii) se puede tener en consideración que $12.n$ ya es divisible por 6, ya que equivale a $2.6.n$. Además de esto será necesario garantizar que el resto sea divisible por 6, por lo tanto será admisible agregarle a “ a ” cualquier número que complemente a 9 para llegar a un múltiplo de 6, como por ejemplo 3; 9 o 15 entre infinitas posibilidades. Dado que este problema es más complejo que los anteriores, queda a criterio del capacitador su realización.

Para gestionar la propuesta, se recomienda inicialmente la resolución de los problemas en parejas, de modo de favorecer la producción personal de procedimientos y el trabajo exploratorio. En la puesta en común será de interés analizar algunos procedimientos, comparar los que presentaron diferencias e instalar preguntas y debates que permitan arribar a ideas como:

- hay un conjunto de problemas que demandan el análisis de la división como una relación entre cantidades que cumplen ciertas condiciones;
- en toda división se verifica que cociente x divisor + resto = dividendo. El resto debe ser un número menor que el divisor y mayor o igual que cero;
- según las condiciones que vinculan al dividendo, divisor, cociente y resto, los problemas de hallar dos valores de una división conociendo los otros dos pueden tener solución única, más de una solución (varias o infinitas), o ninguna;
- muchas veces se contempla a la relación euclidea sólo para comprobar el resultado obtenido luego de hacer la cuenta de dividir. Tener oportunidad de hacer jugar esa

relación en nuevos contextos amplía su sentido y lo deja disponible para resolver nuevos problemas.

Tercer momento - ACTIVIDAD DE LECTURA Y ANÁLISIS

Les proponemos analizar un registro de clase en torno al problema 4 tratado anteriormente, que se implementó en un 6º año de la Provincia de Buenos Aires (pág 21 a 24 de la bibliografía del encuentro). Recordamos el enunciado:

Escriban una cuenta de dividir entre números naturales que tenga cociente 25 y resto 12.

i. ¿Se pueden escribir otras cuentas con estas condiciones? ¿Cuáles?

ii. ¿Cuántas cuentas se pueden escribir? ¿Por qué?

En función del registro leído, en subgrupos analicen:

- ¿Qué estrategias se espera que desplieguen los alumnos para resolver la situación? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian a las utilizadas por ustedes al resolver el problema.
- ¿Qué tipos de “ayuda” se podrían poner en juego mientras los alumnos resuelven?
- Luego de la resolución de la actividad, ¿a qué se podría apuntar en la puesta en común? ¿Por medio de qué preguntas?
- ¿Qué podría quedar registrado en las carpetas como sistematización de lo aprendido?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad del tercer momento

Esta actividad propone el tratamiento didáctico de uno de los problemas que los docentes resolvieron en el momento de trabajo anterior. Constituye una oportunidad para reflexionar en torno al tipo de trabajo matemático que se pretende instalar en las aulas, así como explicitar algunas condiciones necesarias para llevarlo adelante. En este sentido, responder las preguntas a partir de los indicios brindados por el texto permitirá reconstruir algunos componentes de la planificación: posibles resoluciones de los alumnos, anticipación de intervenciones del docente frente a resoluciones erróneas o incompletas, conclusiones a las que se puede arribar como resultado de la actividad.

Para cerrar, resulta relevante explicitar la importancia del tratamiento del concepto de división entera en la escuela primaria: supone para los alumnos introducirse en un nuevo sentido de la

operación e involucrarse en un tipo de trabajo intelectual propio de la matemática: “mirar con más profundidad el funcionamiento de un objeto para estudiarlo, analizar las relaciones involucradas e intentar generalizarlas, preguntarse por la cantidad de soluciones, por si sucederá siempre, por qué está o no permitido hacer en matemática” (Broitman, 2007: 40).

Bibliografía de consulta para el coordinador:

GCBA, Dirección de Currícula (2001). Documento de Actualización Curricular 7º grado. Buenos Aires: Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Recuperado de <http://www.sermaestro.com.ar/integrado.pdf>

Seoane, S. (2012). Matemática. Material Para Directivos Educación Primaria. CABA: IIPE - UNESCO. Recuperado de http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/programa_para_el_acompaniamiento_y_la_mejora_escolar/materiales_de_trabajo/directores/matematica.pdf

Bibliografía de referencia:

Broitman, C. (coord.), Escobar, M., Salgado, M. (2007). *División en 5° y 6° grado de la escuela primaria. Una propuesta para el estudio de las relaciones entre divisor, dividendo, cociente y resto*. Buenos Aires: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Recuperado de <http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/divisionen5y6.pdf>

ENCUENTRO 8

Contenidos del encuentro:

Evaluación final del curso

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN FINAL

1- Lean la siguiente situación de clase. ¿Qué argumentos elaborarían para responderle a esta colega?

En una clase en la que se estaban discutiendo diferentes estrategias para un problema de división, un grupo de estudiantes proponen realizar restas sucesivas, otras multiplicaciones, algunas divisiones, incluso algunos se apoyan en dibujos para llegar a su resolución. Una colega de otro ciclo que observa la clase, reprueba la pertinencia de alentar estrategias alternativas por parte de los niños, alegando que “de ese modo vale todo, y así nunca van a aprender a dividir porque siempre van a poder llegar al resultado”.

2- Si tuvieran que transmitir a un colega qué aprendieron durante el curso realizado, ¿qué **cuatro criterios** de trabajo le transmitirían para organizar la enseñanza de la división?

Guía para coordinar el desarrollo de la actividad

La propuesta de evaluación apunta a que los docentes realicen una fundamentación escrita que dé cuenta de la apropiación de los conceptos tratados a lo largo del curso. Con este fin, podrán consultar sus materiales de trabajo y apoyarse en sus producciones.

En cuanto a la primera consigna, se espera que puedan hacer referencia a la resolución de problemas y el trabajo exploratorio como características del trabajo matemático a desarrollar en las aulas. Al respecto, podrán expresar que se espera que los alumnos a lo largo de segundo ciclo puedan resolver problemas que involucren diversos sentidos de la división, utilizando, comunicando y comparando diversas estrategias y cálculos posibles. En forma más precisa, podrían describir la diversidad de procedimientos que se espera que los niños desplieguen en forma progresiva: el uso de cálculos para los sentidos de la división más sencillos (reparto y partición, por ejemplo), y mayor diversidad de procedimientos, como dibujos, gráficos y cálculos diversos para problemas de dividir más complejos o novedosos (iteración, entre otros).

En cuanto a la segunda actividad, se espera que puedan realizar una síntesis de los aspectos centrales a tener en cuenta en la enseñanza de la división. Se espera que puedan referir a criterios vinculados con los distintos sentidos de los problemas y las estrategias de cálculo, incluyendo el trabajo con cálculo mental, estimativo, con calculadora y algorítmico. Por ejemplo, podrán plantear que:

- inicialmente resulta importante definir un conjunto de problemas a abordar, apuntando a la ampliación de distintos significados de la división según el grado con el que se trabaja. Se pueden tomar ciertas decisiones sobre algunas características de los

problemas para que resulten más sencillos o más complejos, por ejemplo, variando los números.

- En simultáneo con los problemas será necesario recuperar o fortalecer el repertorio de cálculos memorizados en grados anteriores (productos de la tabla pitagórica, divisiones por números redondos, divisiones por la unidad seguida de ceros, por ejemplo), así como promover el uso de diversas descomposiciones para resolver mentalmente el cálculo de divisiones con números más grandes. En los grados superiores, se espera que los alumnos identifiquen las soluciones posibles de divisiones, poniendo en juego las relaciones entre la multiplicación y la división, así como entre dividendo, divisor, cociente y resto.
- Para avanzar en las estrategias de cálculo, también será necesario plantear situaciones de estimación de cocientes así como el uso de la calculadora para resolver problemas y cálculos, verificar resultados y explorar las propiedades de la división.
- La resolución de cuentas de dividir mediante procedimientos algorítmicos debería evolucionar desde estrategias más desplegadas (que incluyan en el cociente en forma reiterada 10 y 100, por ejemplo) hacia aproximaciones al dividendo en menos pasos (usando sus múltiplos).

Una vez realizadas las actividades propuestas, resulta de interés organizar un intercambio colectivo

para que los docentes puedan compartir sus producciones, así como para completarlas, ajustarlas o ampliarlas previo a la corrección por parte del capacitador.

Por último, es importante ofrecer un espacio para que los docentes participantes puedan compartir una apreciación general sobre su paso por el curso, así como contar con una devolución por parte del capacitador sobre el desempeño del grupo.

Para realizar la evaluación final del curso, se sugiere la utilización de una rúbrica como la siguiente:

Calificación /criterios	Sobresaliente	Muy Bueno	Bueno	Regular	Insuficiente
--------------------------------	----------------------	------------------	--------------	----------------	---------------------

Adquisición de conceptos	Logró incorporar en su trabajo los conceptos abordados en el curso, y los expresó con gran claridad.	Logró incorporar en su trabajo conceptos nodales abordados en el curso, y los expresó con bastante claridad.	Logró incorporar en su trabajo algunos conceptos abordados en el curso, aunque mostró dificultades para expresarlos con claridad.	Logró incorporar en su trabajo algunos conceptos abordados en el curso con ayuda del docente.	No logró incorporar en su trabajo los conceptos abordados en el curso.
Participación en los encuentros	Contribuyó con el grupo participando activamente en los intercambios y realizando con compromiso y efectividad las tareas requeridas	Contribuyó con el grupo participando en algunos intercambios y realizando las tareas requeridas.	Contribuyó con el grupo siguiendo atentamente los intercambios. Necesitó estímulo para realizar las tareas requeridas.	No participó en los intercambios. Mostró poca disposición a realizar las tareas requeridas.	Obstaculizó en ocasiones el cumplimiento de los objetivos propuestos.
Asistencia	Asistió a todos los encuentros y con puntualidad.	Asistió a casi todos los encuentros y con puntualidad.	Asistió regularmente a las sesiones, presentando algunas inasistencias y/o faltas de puntualidad.	Asistió muy irregularmente a los encuentros.	Asistió ocasionalmente a los encuentros.

Recursos necesarios para el Curso

- Carpeta para el Capacitador.
- Carpeta para el Participante.