Dirección General de
Cultura y Educación
Buenos Aires
LA PROVINCIA

El diseño curricular en la escuela: Matemática

DOCUMENTO DE TRABAJO
Curso a Distancia

Educación Primaria

Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educacion Superior y Capacitación Educativa
Dirección de Capacitación

Índice

Autora: Beatriz Ressia de Moreno

Este material se basa en su mayoría en el Documento de Formación de Capacitadores realizado en febrero de 2007 por Crippa, Ana Lía; Moreno, Beatriz R. de; Novembre, Andrea, en el programa “Capacitando en la escuela”. Proyecto: Enseñar a estudiar matemática.

Lectura: Ana Lía Crippa y María Emilia Quaranta

Agradecemos la participación y los aportes de los siguientes integrantes de los equipos técnicos regionales en la elaboración de este documento:
Ana Barone / Teresita Chelle / Patricia García / Silvia Palavecino / Cristina Piermattei /
Marcos Varettoni

- posibles errores que puedan surgir
- posibles validaciones por parte de los alumnos

Actividad 17 (de autocorrección)

- Revise su planificación y verifique si incluye todos los tipos de problemas de multiplicación descritos.

La enseñanza de la división

Actividad 18 (de autocorrección)

Le proponemos analizar las siguientes afirmaciones sobre aspectos que nos interesa destacar en la enseñanza de la división. Registre sus opiniones para retomarlas más adelante.

- Los problemas de división pueden ser resueltos por una variedad de procedimientos y operaciones.
- El dominio del algoritmo no garantiza reconocer sus ocasiones de empleo en distintos tipos de problemas.
- El algoritmo es solamente un recurso de cálculo (y no necesariamente el principal) que los niños deben aprender en la escuela.
- Si no hay instancias de reflexión y validación acerca de las razones por las que el algoritmo funciona como funciona, su aprendizaje carecerá de sentido.
- Es necesario que existan instancias de sistematización y estudio sobre la división, organizadas y conducidas por el docente
- El estudio de la división es de tal complejidad que exige muchos años de la escolaridad. Su enseñanza abarca también la ESB.

Problemas de división: diferentes sentidos

a) Problemas de medir o partir:

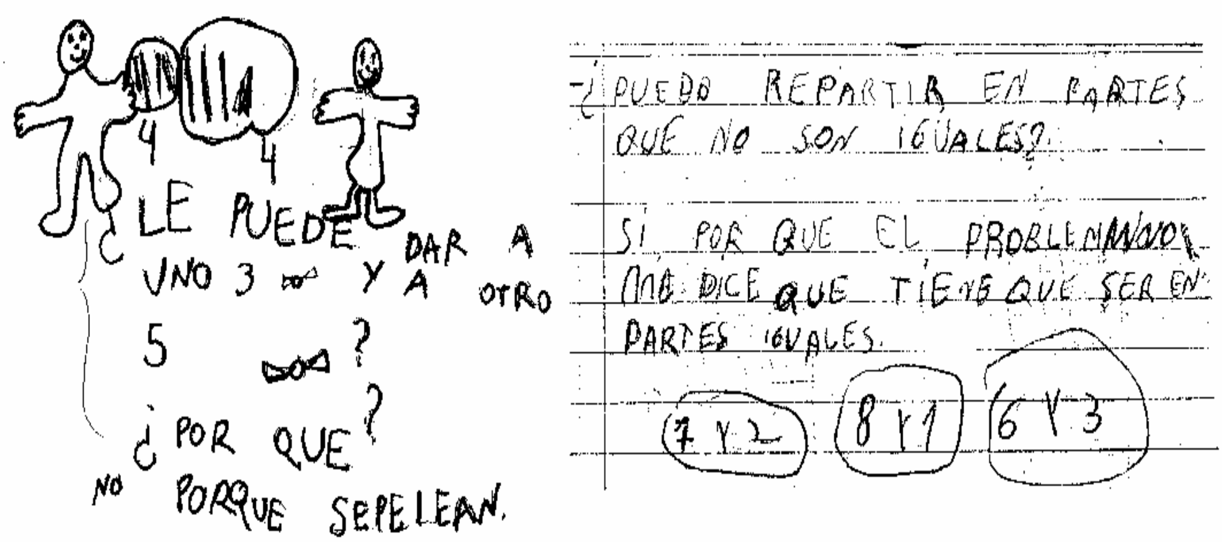
De la misma manera que con la multiplicación, la enseñanza de la división puede iniciarse desde 1º año. Que los alumnos se enfrenen desde los primeros años de escolaridad a este tipo de problemas les permite, por una parte, aprender a elaborar estrategias propias de resolución de problemas cuando no tienen aún disponible un recurso económico y, por otra parte, abona al proceso de construcción del sentido de dicha operación.

En 1º año se puede trabajar con problemas de reparto, incluyendo algunos en los que el reparto no es necesariamente equitativo. La finalidad está en lograr que los niños analicen, frente a los enunciados de los problemas, si hay o no una restricción de reparto equitativo. Leer enunciados, revisarlos, transformarlos, considerar la cantidad de soluciones posibles, etc. forma parte de la tarea de aprender a resolver un problema[10].

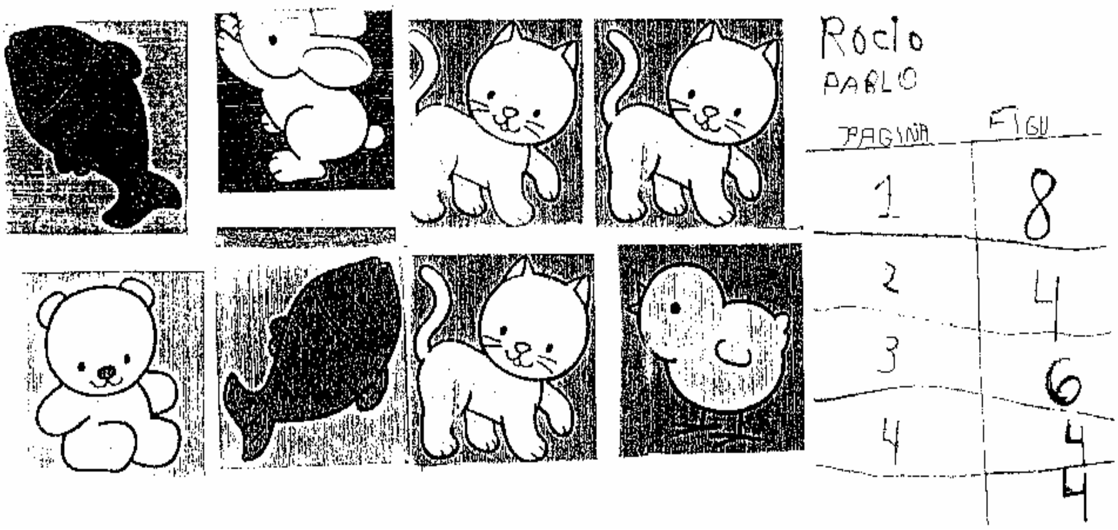
Por ejemplo: *un señor tiene 8 caramelos y se los da a dos niños ¿Cuántos les da a cada uno?* La mayor parte de los niños contestó que eran 4 para cada uno. La maestra preguntó entonces si era posible darle 5 a uno y 3 a otro. Al principio los niños comentan que sería injusto. La maestra les propone releer el problema para analizar si es posible desde el enunciado. Como el mismo no dice nada acerca de la equitatividad del reparto, les pregunta qué debería decir el

[10]DGCyE. O*rientaciones Didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB*. Dirección de Educación General Básica. DGCyE. La Plata. 2001.

mismo para que “sí o sí deban recibir la misma cantidad”. Los alumnos sugieren agregar al enunciado *en formas iguales.*. Esto es registrado en los cuadernos.

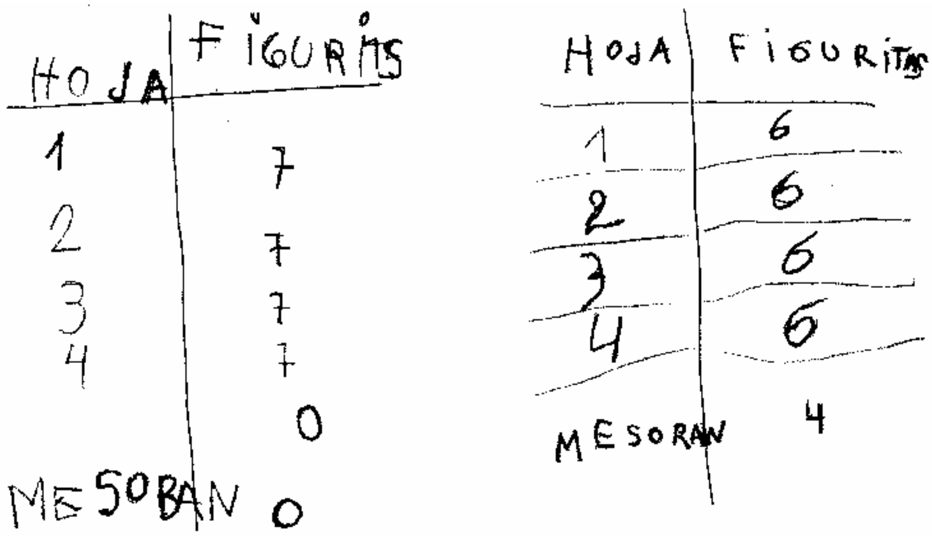


En otro problema de 1º año, los chicos tenían que pegar figuritas en un pequeño *álbum casero* de 4 páginas. En la contratapa, había una hoja en blanco para anotar en un cuadro de doble entrada cuántas figuritas se pegaban en cada página y cuántas sobraban. La primera vez se les entregó a cada grupo un álbum y 22 figuritas. Los niños las empezaron a pegar llenando la primera página con muchas y el resto en las siguientes. Por ejemplo, Rocío y Pablo llenaron así su álbum:



La segunda consigna fue diferente: se les entregó a cada grupo un nuevo álbum y 28 figuritas con la consigna de que pegaran todas las figuritas, pero que esta vez hubiera la misma cantidad en cada página. Esta restricción les exigía pasar de un procedimiento improvisado de pegado, hacia la necesidad de realizar una anticipación de cuántas pegar en cada página.

Algunos niños logran pegar 7 en cada hoja utilizando un procedimiento de reparto de 1 en 1, como Nazarena y Micaela, o de 2 en 2 como Magalí.

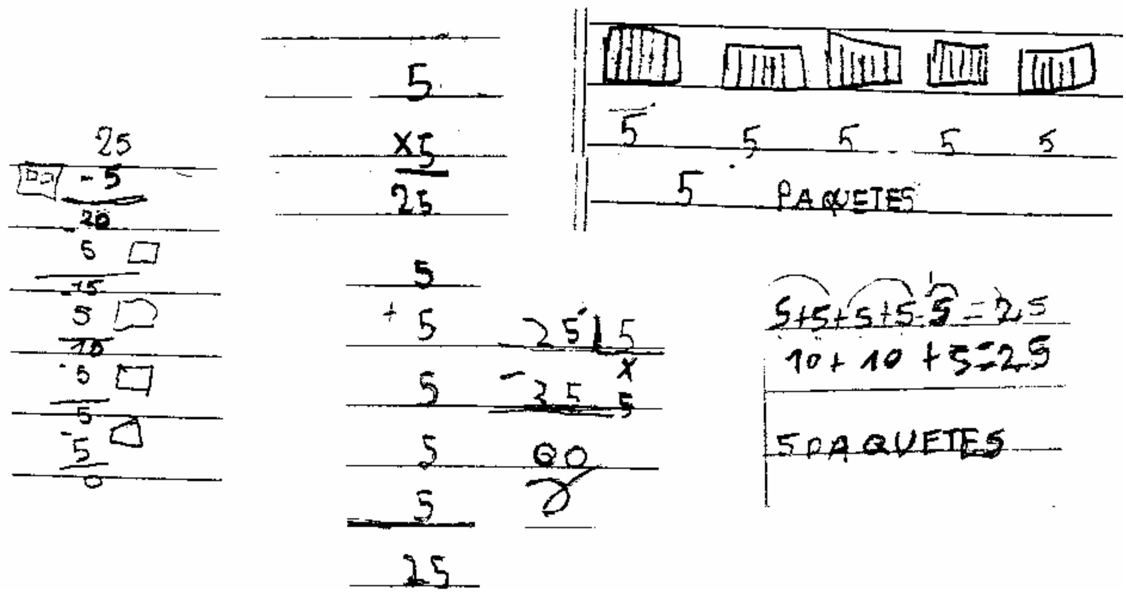


Otros niños pegan 6 en cada uno y escriben que les sobran 4, como Tomás y Jazmín.

Luego, la docente plantea a toda la clase *si se pueden seguir repartiendo las figuritas que sobran.* A partir de esta intervención, se promueve un intercambio colectivo, producto del cual se arriba a la conclusión de que 7 es la respuesta correcta.

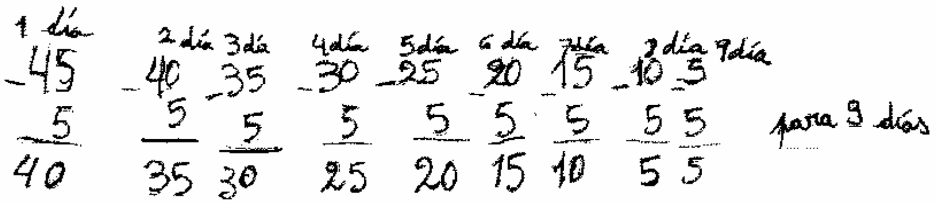
Nos parece importante resaltar que en esta clase, como sucede en tantas otras, hubo muchos niños que obtuvieron resultados erróneos. Aquí no se trata de cómo “corregir” los errores que aparecieron, sino considerarlos motor de debate y avance para todos.

En 3º año se resolvió este problema: *Mi mamá donará una torta para la fiesta. Para hacerla necesita 25 galletitas de chocolate. Si cada paquete tiene 5, ¿cuántos paquetes necesita?* (DGCyE 2001). Algunos niños dibujan, otros suman, otros restan, otros multiplican y hasta algunos producen una escritura próxima a la división:

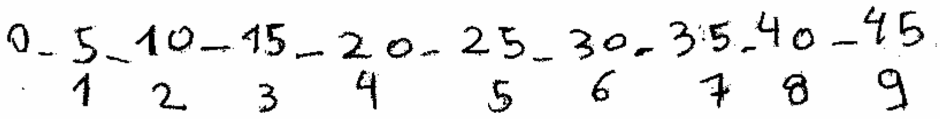


En 2º año se puede proponer el siguiente problema: *Tengo $ 45, gasto $5 por día. ¿Para cuántos días me alcanza?* Los niños resuelven este problema apelando a diversos recursos como restas sucesivas, conteo de 5 en 5 hasta llegar a 45, etc.

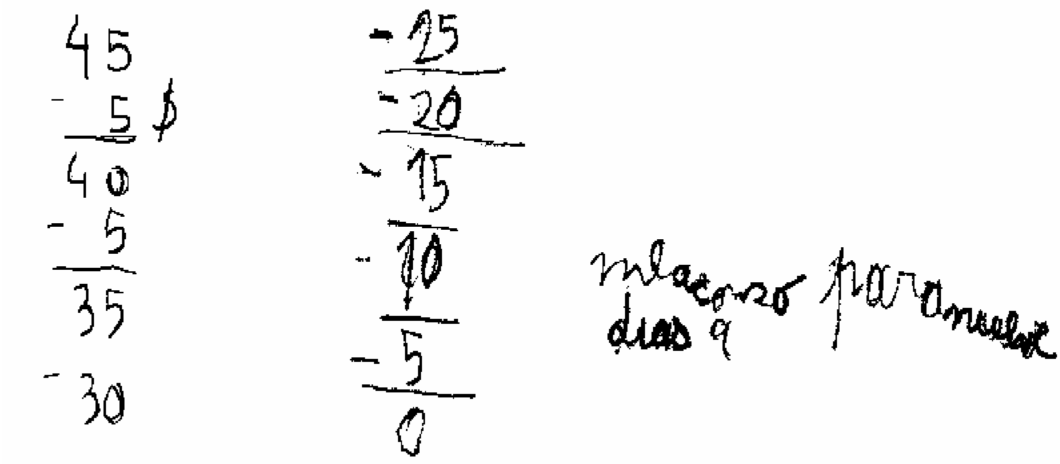
Cristian hace lo siguiente:



En cambio, Franco:



Diego comienza haciendo restas sucesivas y cuando llega a 30 se da cuenta de que no precisa escribir las restas, anotando directamente los números al descontar de 5 en 5.



Actividad 19 (de autocorrección)
Dimos más arriba (actividad 18) una serie de afirmaciones como un modelo posible de guía de análisis en la que el docente se pudiera apoyar para repensar la enseñanza de la división. Revise las conclusiones a las que llegó en el momento de su lectura, a la luz de los procedimientos de los alumnos incluidos más arriba, y las vinculaciones que estos tienen con los tipos de problemas que se les plantearon.

b) Problemas de reparto

En los problemas que hemos analizado más arriba, se trata de averiguar el valor del número de partes después de realizado el reparto. Analicemos ahora otro tipo de problemas de división:

Actividad 20 (para analizar en el encuentro presencial)
¿En qué cambiarían los procedimientos de los chicos y cuáles serían las razones matemáticas de esos cambios si modificáramos el problema *tengo $ 45, gasto $5 por*

día. Para cuántos días me alcanza? del siguiente modo?: *"Tengo $ 45 para gastarlos en 5 días. ¿Cuánto puedo gastar por día si todos los días gasto lo mismo y lo gasto todo?*

Nos interesa particularmente, a través del segundo problema, plantear el problema de la restricción de la suma y la resta cuando se trata de buscar el valor de cada una de las partes al realizar el reparto (cuánta plata puedo gastar en cada uno de los 5 días hasta agotar los $45). ¿Se podrían hacer restas sucesivas como 45 – 5? En ese caso, ¿qué significa el número 45 dentro del problema? ¿Y el número 5? ¿Se puede restar 5 días a 45 pesos? ¿El resultado 40, significaría pesos o días?

En este tipo de problemas solo pueden utilizarse procedimientos ligados al campo multiplicativo. Por ejemplo, aproximaciones por producto:

1 día	$10
2 días	$20
...	...
5 días	$50 me pasé.

Por tanteo y error probando con otros números, llegar a que cada día gasta $9.

Otro procedimiento posible sería que dibujen una representación de los 5 días y realicen un reparto uno a uno hasta agotar los 45:

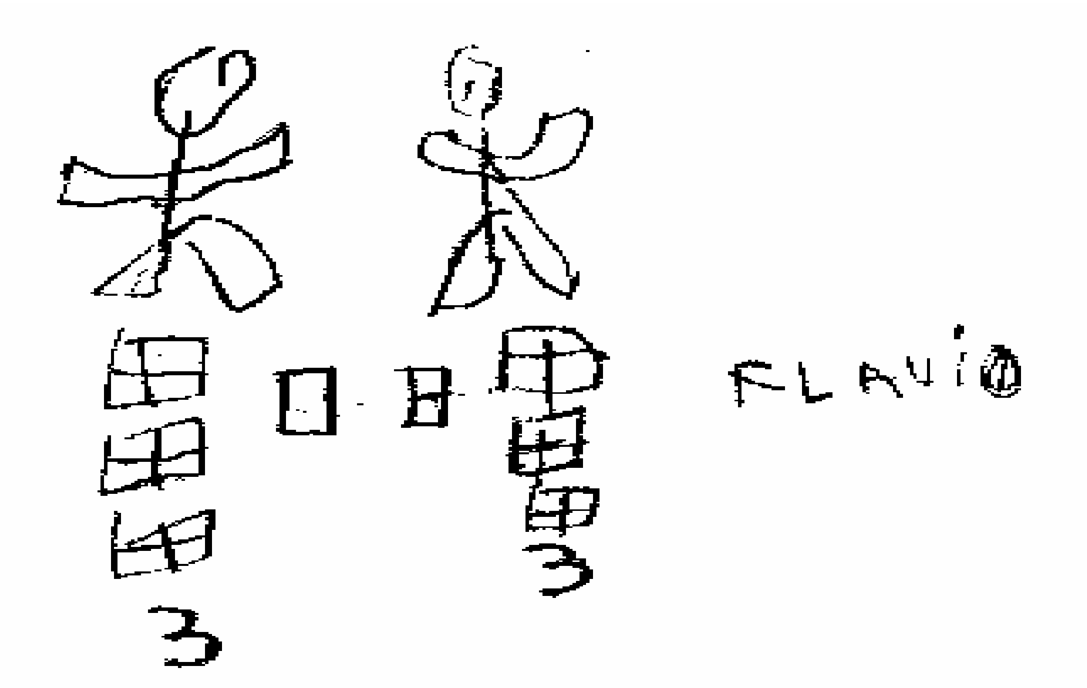
xxxxxx xxx	xxxxxx xxx	xxxxxx xxx	xxxxxx xxx	xxxxxx xxx

Es importante poder distinguir entre estos dos tipos de problemas porque como vimos, los procedimientos posibles de ser utilizados por los alumnos son también diferentes.
Una manera de facilitar la distinción de los dos tipos de problemas es identificar que en los problemas de medir o partir en los que se busca el valor del número de partes, después de realizado el reparto, las cantidades expresadas en los datos están asociadas al mismo universo empírico ($45 y $5). En cambio en los problemas de repartir en los que la solución plantea la búsqueda del valor de cada una de las partes, las cantidades refieren a distintos universos empíricos (45 pesos y 5 días).

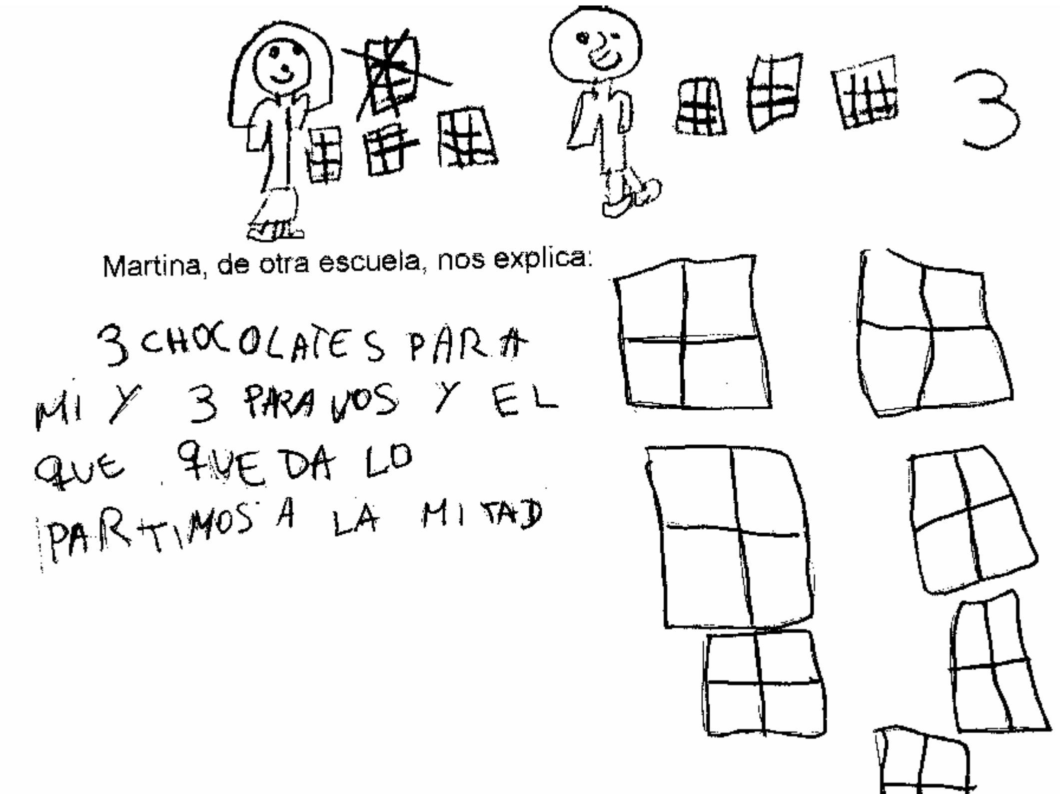
Otro tipo de trabajo que incide en la construcción con sentido de esta operación está relacionado con decidir si el resto es fraccionable o no. En 1º año se les plantea a los alumnos un problema en el que hay que repartir 7 chocolates entre 2 chicos, y otro en el que hay que repartir globos con el objetivo de promover la discusión acerca de que *los chocolates se pueden partir, pero no lo globos.*

Algunas estrategias: *en el primer problema muchos alumnos decidieron repartir los chocolates en partes iguales y el que sobraba no dárselo a ninguno de los dos. Otros alumnos decidieron darle el que sobraba en mitades iguales a cada uno de los niños. Manifestaron que podían hacerlo dado que eran chocolates y se pueden partir a la mitad. En el segundo problema también repartieron en partes iguales, y el globo que sobró dijeron no poder repartirlo porque se reventaría.*

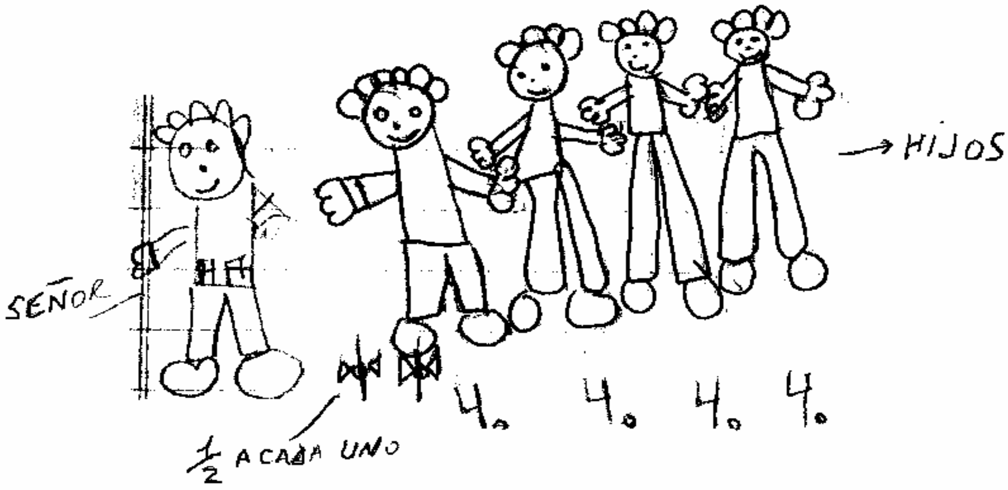
Por ejemplo, Flavio escribe primero 3 chocolates, y luego dibuja medio más para cada uno.



Belén reparte 4 a uno y 3 a otro, y luego tacha uno de los chocolates repartidos para que queden iguales.



2º año: *Un señor tiene 18 caramelos y quiere repartirlos en partes iguales para sus 4 hijos. ¿Cuántos le dará a cada uno?* Agustina realiza una partición del resto:



En el apartado anterior nos referimos a problemas de repartir equitativamente, de partir o medir y de fraccionar restos, que constituyen sentidos de la división. Además de estos problemas podemos identificar los siguientes.

c) Problemas de organizaciones rectangulares[11]

Así como para resolver un problema como el siguiente*: En un teatro hay 32 filas de butacas. Si en cada fila hay 18 butacas. ¿Cuánta gente sentada entra?* es pertinente recurrir a la multiplicación, la división también es una herramienta válida para resolver problemas que impliquen organizaciones rectangulares.

> **Actividad 21** (para analizar en el encuentro presencial)
> Transformar el problema anterior para que se pueda resolver con una división.

Como habrá podido verificar, un problema de multiplicación puede transformarse en uno en el que sea pertinente resolver a través de una división, cambiando el lugar de la incógnita.

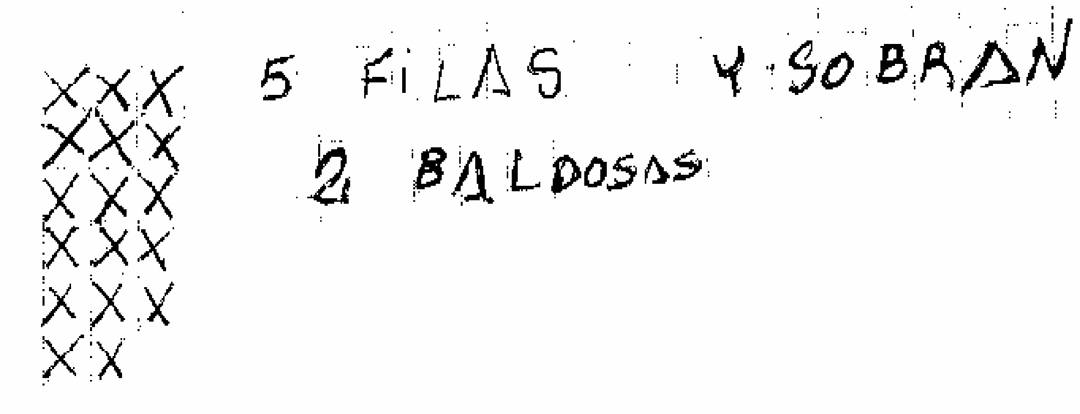
Analicemos a continuación diferentes estrategias que utilizan los niños al enfrentarlos con este tipo de problemas:

Ejemplo 1:

2º año: *Tengo 17 baldosas para armar un patio rectangular. Si pongo 3 baldosas en cada fila. ¿Cuántas filas puedo armar? ¿Cuántas baldosas sobran?*

Por ejemplo, un grupo recurre al dibujo:

[11] Broitman, C. e Itzcovich; H. Ob. Cit.



En otro grupo, inician el proceso de resolución del primero de estos problemas a través del dibujo; luego realizan un cálculo de sumas reiteradas y anotan a continuación la suma del resto para reconstruir el total de 23.

Si bien no es objetivo de segundo año el estudio de los recursos de cálculo de la división, los niños tienen herramientas diferentes que les permiten resolver estos problemas. Del mismo modo que hemos señalado para los problemas de reparto y partición, es parte del estudio de esta operación en el primer ciclo la resolución de problemas de este tipo por medio de procedimientos diversos (en este caso dibujos inicialmente, y luego sumas, restas o multiplicaciones).

Ejemplo 2:

3º año: Armar un patio rectangular con 36 baldosas poniendo 5 baldosas en cada fila ¿Cuántas filas va a tener el patio?

Para resolver este tipo de problemas, muchos alumnos recurren al dibujo de los patios.

A continuación sus docentes les solicitan que busquen cálculos que representen la situación. Producen allí multiplicaciones y sumas organizadas de diferentes maneras. Por ejemplo:

$$5 \times 7 = \begin{array}{r} 35 \\ \underline{+\ 1} \\ 36 \end{array} \qquad\qquad 4 \times 6 = \begin{array}{r} 24 \\ \underline{+4} \\ 28 \end{array}$$

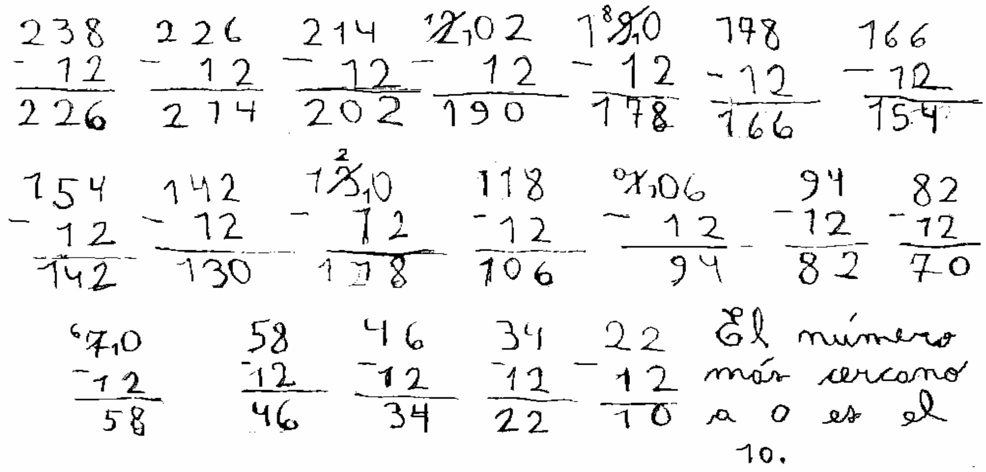
A partir de este trabajo, se inició la construcción del algoritmo de la división.

d) Problemas de iteración

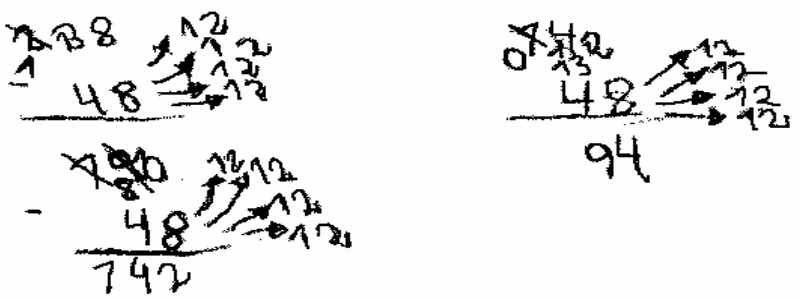
Se trata de aquellos problemas en lo que hay que "encontrar cuántas veces entra un número adentro de otro", aunque los contextos en los que se presentan no den cuenta "inmediatamente" de esta relación.
El siguiente problema fue planteado en 2º año: *Estoy en el número 238. Doy saltitos para atrás de 12 en 12. ¿A qué número llego más cercano al 0?* [12]

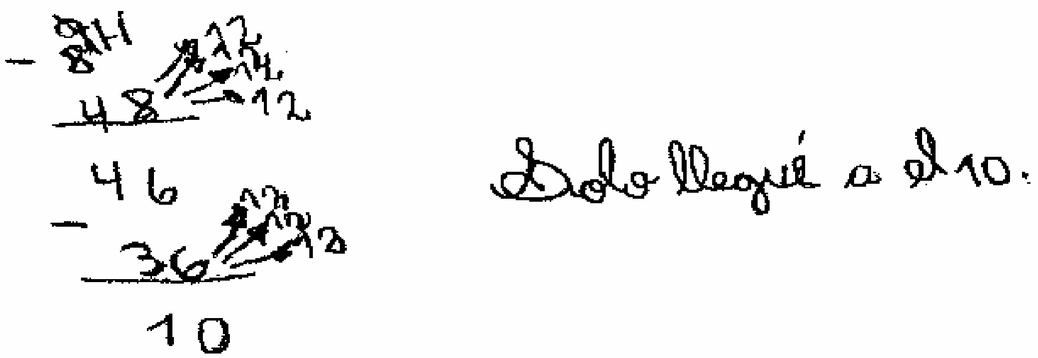
Algunos alumnos realizan restas sucesivas de 12 en 12

[12] Obviamente, en primer ciclo se trabaja sólo con números naturales.



Otros alumnos se dan cuenta de que es más conveniente restar “varios doces juntos” como en este caso:

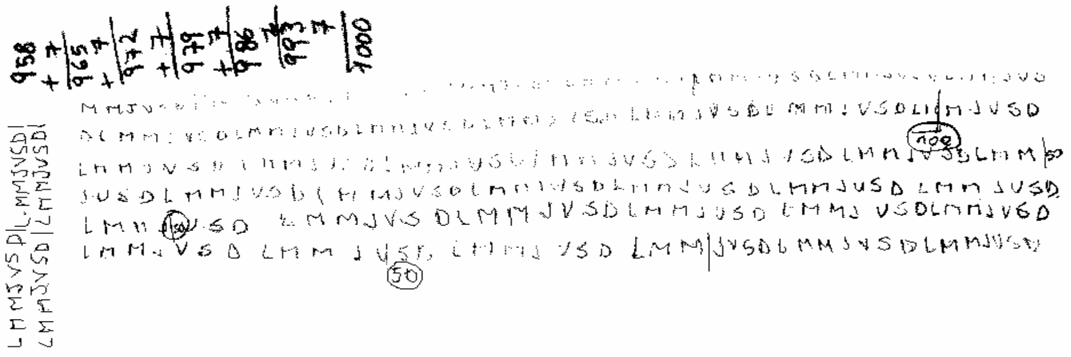




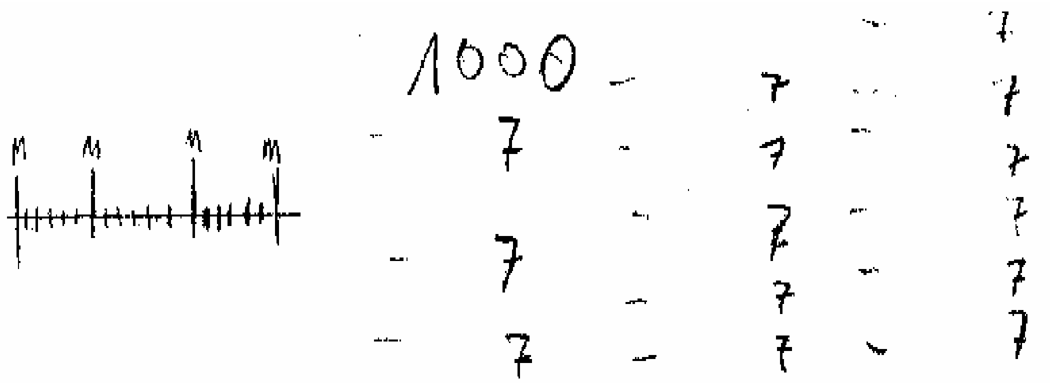
La intención de este trabajo es que los alumnos puedan comparar los diversos modos de resolverlo, y analizar la economía de uno sobre el otro. En tercer o cuarto año, los alumnos podrán reconocer la división como recurso para resolver también este tipo de problemas.

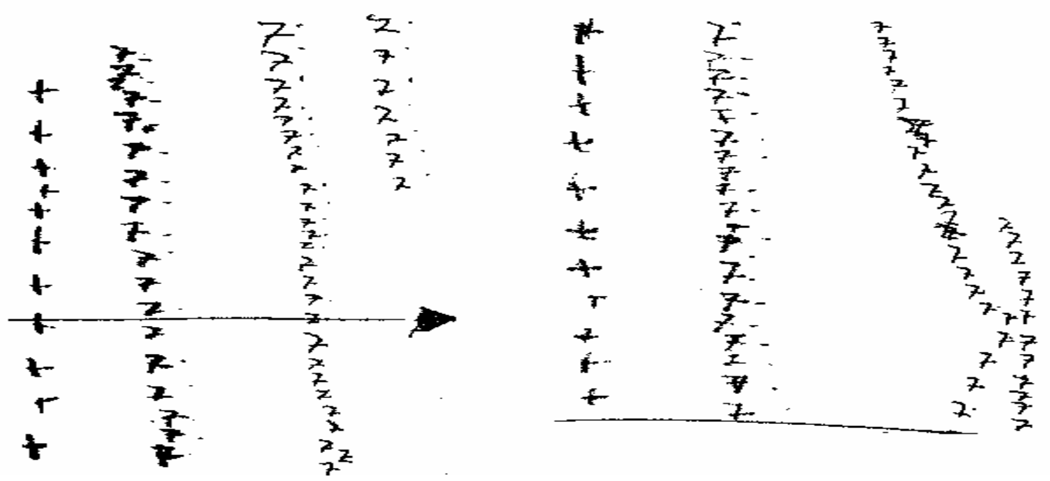
Incluimos ahora (siempre perteneciente al trabajo de Broitman e Itzcovich) un problema planteado en 6º año: *Sabiendo que hoy es martes. ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días?*

Los alumnos, para resolver este problema, se organizan en parejas. Algunos alumnos, como Diana, comienzan la resolución haciendo largas listas con las iniciales de los días de la semana, señalando la cantidad de días transcurridos (por ejemplo 100). Luego abandona este recurso y continúa sumando “sietes” al darse cuenta de esta regularidad. (Transcribimos solo una parte de su larga producción):



Bernardo propone usar una recta numérica como recurso de control y marcar en ella los días martes con un M y una rayita para cada uno de los días siguientes. Luego abandona esta estrategia y decide realizar restas de siete en siete, mientras dice: *Le saco siete, le saco siete,...* Empieza escribiéndolas y posteriormente pregunta si puede usar la calculadora y la usa para sumar sietes.





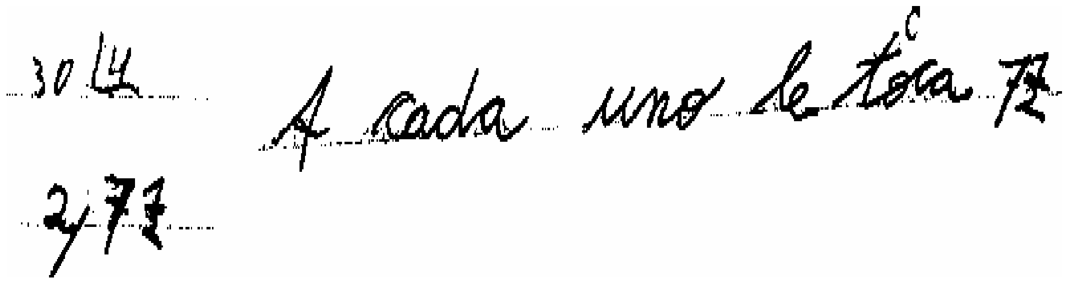
A partir del comentario de Bernardo (*le saco siete, le saco siete,...)* se produce el siguiente diálogo:

Matías: *¡"Entonces lo podés dividir por siete!*
Maestra: *¿Qué dividís por siete?*
Matías: *Y...mil dividido siete*
Maestra: ¿Por qué?
Matías: Para *no restarlo tantas veces*
(Matías realiza la cuenta obtiene 142 de cociente y 6 de resto)
Matías: *No me doy cuenta. ¿Qué son estos ciento cuarenta y dos y estos seis que sobran?*
Luego de un pequeño diálogo con la maestra, Matías dice: *son ciento cuarenta y dos semanas,* y pregunta *¿Y estos seis que sobran?* La clase entera comienza a analizar el significado de ese 6 hasta que Gaspar dice que se trata de 6 días. Los alumnos cuentan 6: miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo y lunes, siendo este último día la respuesta al problema.

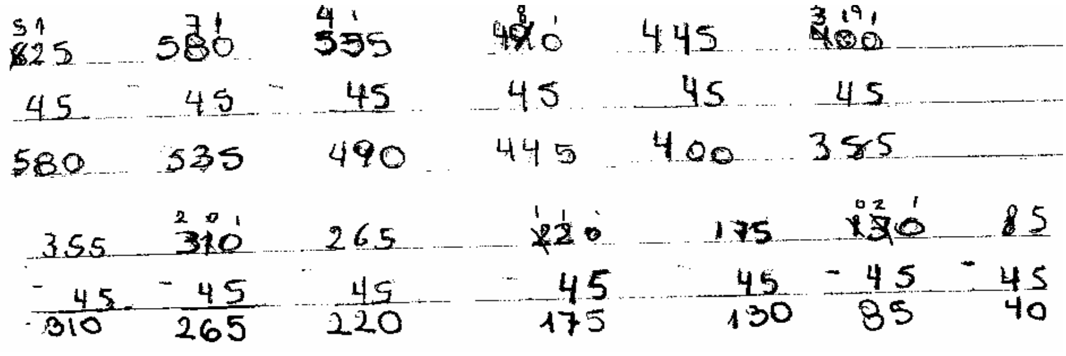
Las docentes retoman la situación y promueven el análisis de los números del algoritmo en relación con el problema. Luego proponen otro problema: *"Qué día de la semana será dentro de 3008 días"* con el objetivo de que ahora todos los alumnos utilicen la división para su resolución.
Estos problemas, además de poder ser considerados como problemas de iteración, tienen la particularidad de que la respuesta a la pregunta planteada, está dada por el análisis del resto, al igual que en otras situaciones.

Problemas de análisis del resto

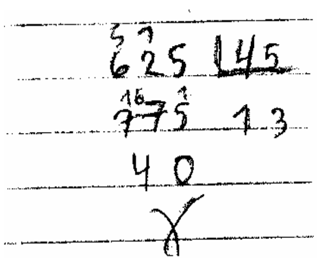
En cuarto año, por ejemplo, se espera que los niños puedan representar de maneras diversas el análisis realizado sobre el resto, como por ejemplo, este alumno que frente al problema "Hay que repartir 30 chocolates entre 4 chicos", escribe a su manera la partición realizada:

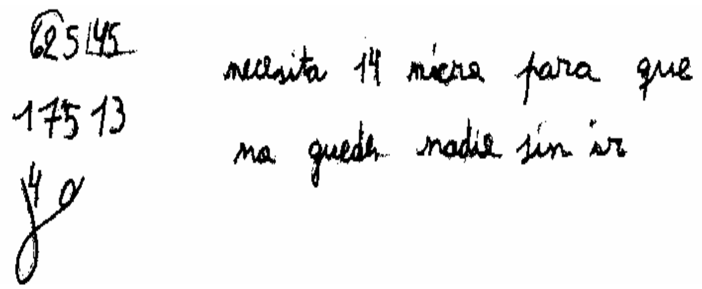


A veces este resto "responde" la pregunta al problema, como en el caso de los 1000 días recién analizado. En otras ocasiones exige considerar "un elemento más". Veamos algunos ejemplos:
6º año: *"Hay 625 pasajeros para ser trasladados a un congreso en micro. En cada micro entran 45 personas. ¿Cuántos micros se necesitan?"*.
Algunos alumnos restaron sucesivamente 45:



Otros alumnos hicieron el algoritmo de la división, obteniendo 13 de cociente y 40 de resto.





Entre los alumnos que usaron restas sucesivas o el algoritmo, algunos dieron como respuesta *13 micros* y otros se dieron cuenta de que era necesario otro micro para los 40 pasajeros que sobraban. A partir del intercambio entre los alumnos y un análisis colectivo de las respuestas obtenidas se pudo arribar a la conclusión de que eran necesarios 14 micros, como registra este alumno: *se necesitan 14 micros para que no quede nadie sin ir.*

> **Actividad 22** (para analizar en el encuentro presencial)
> Los problemas incluidos más abajo se resuelven todos haciendo la misma cuenta. Determine en cada caso.
> a) ¿Cuál es la respuesta al problema? ¿En qué incide el valor del resto?
> b) ¿Que tipo de relaciones plantea cada uno?
> c) En relación a lo anterior, ¿qué tipo de procedimientos puede anticipar en sus alumnos?

Problemas:

1. Hay que trasladar 61 personas en autos. Si en cada auto pueden viajar 6 personas, ¿cuántos autos se necesitan?
2. Tengo 61 chocolates para repartir entre 6 chicos. ¿Cuánto chocolate le toca a cada uno si lo reparto todo y en partes iguales?
3. ¿Cuántos dígitos tendrá el resultado de hacer 61: 6 con la calculadora? ¿Y si se hiciera la cuenta con lápiz y papel?
4. Hay que repartir 61 rosas en 6 ramos iguales, ¿Cuántas rosas habrá en cada ramo?
5. Hay que ubicar 61 rosas de a 6 rosas en cada ramo. ¿Cuántos ramos se podrán formar?
6. Hay que distribuir $61 entre 6 personas. ¿Cuánta plata le darán a cada uno si se reparte todo y en partes iguales?

7. De una varilla de 61m se hicieron 6 pedazos de la misma longitud. ¿Cuánto mide cada pedazo?
8. De una varilla de 61m, ¿cuántos pedazos de 6m se pueden cortar?
9. De los $ 61 que tengo, gasto por día, ¿para cuántos días me alcanza?
10. Si estoy en el casillero nº 61 del Juego de la Oca y bajo dando saltos de a 6 casilleros, ¿a qué número llego en el último salto que puedo dar?

Por lo general, en las prácticas más comunes de enseñanza el resto de la división no se tiene demasiado en cuenta. No se dan problemas en los que la respuesta esté vinculada al valor del resto y no al del cociente; se prefieren problemas cuyo resto es igual a cero, o no se pide la explicitación en la respuesta del problema acerca del valor del resto, etc.

Como se habrá podido concluir, *la división es la única operación cuya respuesta depende del contexto.* Esto abre dos cuestiones didácticas muy importantes. Por un lado, la condición necesaria de enseñar a través de los problemas y al mismo tiempo, como esto no es suficiente. Es decir, sin problemas no hay posibilidad de descubrir este aspecto de la división. Si se prioriza la enseñanza del algoritmo, por más que los alumnos hagan muchas cuentas, los valores hallados son solo números y por lo tanto no hay necesidad de analizar si el resto hay que dejarlo entero, fraccionarlo, modificar el cociente, etc.

La otra cuestión es que si no media la intencionalidad del docente en que sus alumnos descubran este aspecto de la división, no planteará situaciones que los enfrenten a tomar ese tipo de decisiones y validarlas y por lo tanto, no se apropiarán de este conocimiento.

En segundo ciclo, el análisis con los alumnos tendría que centrarse en las diferentes respuestas según sea resto entero o no, haya que bajar decimales y en ese caso cuántos (dos si es dinero, tres si son longitudes); el valor del resto cuando en el cociente haya decimales (el resto 4 en el problema de dinero equivale a centésimos, en el problema de longitudes a milésimos, en el problema de chocolate a 4/6); etc.

División exacta y división entera

En las diferentes situaciones de división, desde el punto de vista del significado del enunciado, en relación con el contexto en el cual se presenta es posible distinguir:

- situaciones en las que no tiene sentido pensar en un resto no nulo.

Por ejemplo, en el problema: *Si se corta una cinta de 32cm en 5 tiras de la misma longitud, ¿cuánto medirá cada tira?*, se propone cortar toda la cinta, por lo cual se está poniendo en juego un sentido de la división vinculado con la definición de división exacta. La división puede ser interpretada en estos casos como la búsqueda del factor desconocido de una multiplicación.

> **Actividad 23** (para analizar en el encuentro presencial)
> a) Analicen si el siguiente problema cumple con esta característica; *¿Por cuál número hay que multiplicar a 5 para obtener 32?*
> b) En problemas como estos ¿a qué otro contenido matemático es necesario apelar para poder resolverlos?
> c) ¿Qué relación entre la división y la multiplicación queda evidenciada?

- situaciones en las que tiene sentido pensar en un resto no nulo.

Por ejemplo, en el problema: *Si se reparten en partes iguales 20 figuritas entre 6 chicos, ¿cuántas figuritas le tocan a cada uno?*